Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

M.A.C.

FORMULÁRIO

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\ln z = w \Leftrightarrow z = e^w \qquad \ln re^{i\theta} = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

Equações de Cauchy-Riemann para coordenadas cartesianas: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \ \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Equações de Cauchy-Riemann para coordenadas polares: $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\,; \ \ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$

$$\int_a^b (u(t) + iv(t))dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \qquad \text{onde } C \text{ é dado por } z = z(t),\ a \leq t \leq b$$

Fórmula correspondente ao Teorema de Cauchy: $\oint_C f(z)dz = 0$

Consequência do Teorema de Cauchy:
Sob condições adequadas, o integral de f de z_0 a z_1 é dado por $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$ onde F é uma primitiva de f.

Fórmula Integral de Cauchy: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

Fórmula Integral de Cauchy para derivadas: $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$

Equação de Laplace: $f_{xx} + f_{yy} = 0$
($f(x, y)$ é harmónica se possui derivadas contínuas até à segunda ordem e satisfaz a equação de Laplace)

O raio de convergência r da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

é dado por $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ ou por $r = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (se o limite existir).

Série de Taylor da função f relativa ao ponto z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin (= série de Taylor relativa ao ponto 0):

Desenvolvimento da exponencial: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Desenvolvimento do seno: $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$

Desenvolvimento do cosseno: $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

Desenvolvimento do seno hiperbólico: $\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Desenvolvimento do cosseno hiperbólico: $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

Desenvolvimento de $\frac{1}{1-z}$: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$

Desenvolvimento binomial: $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) z^n \qquad (|z| < 1)$

onde $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$

Série de Laurent da função f relativa ao ponto z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \,(z-z_0)^n \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

Resíduo de f em z_0: $\operatorname{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$

Fórmula do Teorema dos Resíduos:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j)$$

z_0 é pólo de ordem m de f se e só se existir o $\lim\limits_{z \to z_0} [(z-z_0)^m f(z)]$ e for $\neq 0, \infty$

Se z_0 é um pólo de ordem m de f, então

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

Cálculo de alguns integrais:

I) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$: Faz-se a mudança de variável $z = e^{i\theta}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (note-se que $d\theta = \frac{1}{iz}dz$) e usam-se as expressões de $\sin z$ e $\cos z$ em função de $e^{i\theta}$.

II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, onde $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ com $p(x)$ e $q(x)$ polinómios tais que grau$q(x) -$ grau$p(x) \geq 2$ e f tem um número finito de singularidades todas elas não reais:

Tem-se $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_C f(z)dz$, onde C é a união de uma semicircunferência de centro em 0 e raio R com o diâmetro $[-R, R]$ com R escolhido de maneira que todas as singularidades de f situadas no semi-plano superior (supondo que a semicircunferência também foi escolhida nesse semi-plano) estejam no interior de C.

III) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{imz} f(z)dz$, onde $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ com $p(z)$ e $q(z)$ polinómios tais que grau$q(z) -$ grau$p(z) \geq 1$, e f tem um número finito de singularidades todas elas não reais:

Se $m \in \mathbb{R}^+$, tem-se $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{imz} f(z)dz = \oint_C e^{imz} f(z)dz$, onde C é a união de uma semicircunferência no semi-plano superior de centro em 0 e raio R com o diâmetro $[-R, R]$, sendo R escolhido de maneira que todas as singularidades de f situadas no semi-plano superior estejam no interior de C.

Se $m \in \mathbb{R}^-$, tem-se $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{imz} f(z)dz = -\oint_C e^{imz} f(z)dz$, onde C é a união de uma semicircunferência no semi-plano inferior de centro em 0 e raio R com o diâmetro $[-R, R]$, sendo R escolhido de maneira que todas as singularidades de f situadas no semi-plano inferior estejam no interior de C.

Os integrais $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(mz) f(z)dz$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(mz) f(z)dz$ podem calcular-se calculando $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{imz} f(z)dz$.

Série de Fourier associada à função f de período T:

Forma exponencial: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{i2n\pi t}{T}}$$

Forma trigonométrica combinada: $$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(\frac{2n\pi t}{T} + \theta_n)$$

Forma trigonométrica: $$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + B_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right)$$

Ceficientes: $$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-\frac{i2n\pi t}{T}} dt$$

$$C_n = |C_n| e^{i\theta_n}$$

$$2C_n = A_n - iB_n, \ \ C_0 = A_0$$

Propriedades dos coeficientes de Fourier

1. Se $y(t) = Ax(t) + B$, onde A e B são constantes, então a relação entre os coeficientes de $y(t)$ e $x(t)$ é dada por

$$C_{0y} = AC_{0x} + B$$
$$C_{ky} = AC_{kx}, \ k \neq 0$$

2. Se $y(t) = x(-t)$, então a relação entre os coeficientes de $y(t)$ e $x(t)$ é dada por

$$C_{ky} = \overline{C}_{kx}$$

3. Se $y(t) = x(t - t_0)$, então a relação entre os coeficientes de $y(t)$ e $x(t)$ é dada por

$$C_{ky} = C_{kx} e^{-ik\frac{2\pi}{T} t_0}, \ \text{ onde } T \text{ é o período}$$

Identidade de Parseval para séries de Fourier:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{-T/2}(f(t))^2dt = 2A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$$

Transformada de Fourier de f: $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt$

Inversão da transformada de Fourier: $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{f}(\omega)d\omega$

Convolução (de Fourier): $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$

Propriedades da transformada de Fourier (onde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$):

	Função	Transformada de Fourier
Linearidade	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
Transformação do tempo	$f(at+\tau)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a})e^{i\tau(\omega/a)}$
Dualidade	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Mudança da frequência	$f(t)e^{i\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
Convolução	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$
Diferenciação	$\frac{d^n[f(t)]}{dt^n}$	$(i\omega)^n F(\omega)$
	$(-it)^n f(t)$	$\frac{d^n[F(\omega)]}{d\omega^n}$
Integração	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{i\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

Transformada de Fourier em cosseno: $\mathcal{F}_c(f(t)) = \hat{f}_c(\omega) = 2\int_0^{\infty} \cos\omega t f(t) dt$

Transformada de Fourier em seno: $\mathcal{F}_s(f(t)) = \hat{f}_s(\omega) = 2\int_0^{\infty} \sin\omega t f(t) dt$

Fórmulas de inversão para as transformada de Fourier em seno e cosseno:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\omega t \hat{f}_c(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\omega t \hat{f}_s(\omega) d\omega$$

Identidade de Parseval para transformadas de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Identidades de Parseval para as transformadas de Fourier em seno e cosseno:

$$\int_0^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}_c(\omega)\hat{g}_c(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}_s(\omega)\hat{g}_s(\omega)d\omega$$

Transformada de Laplace: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

Transformada bilateral de Laplace: $\mathcal{L}_b\{f(t)\} = F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

Transformada de Laplace inversa: $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds$

Transformada-z de $f[n]$: $F(z) = \mathcal{Z}[f[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}$

Inversão da transformada-z: Para $\mathcal{Z}[f[n]] = F(z)$,

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} z^{n-1}F(z)dz =$$

$=$ soma dos resíduos da função $z^{n-1}F(z)$ nas suas singularidades

Convolução $f[n] * g[n]$ de $f[n]$ e $g[n]$ é a função $h[n]$ definida por:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{n} f[k]g[n-k]$$

Propriedades da transformada-z (onde $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$):

Função	Transformada-z
$af_1[n] + bf_2[n]$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
$f[n-n_0]u[n-n_0]$; $n_0 \geq 0$	$z^{-n_0}F(z)$
$f[n+n_0]u[n]$; $n_0 > 0$	$z^{n_0}\left[F(z) - \sum_{n=0}^{n_0-1} f[n]z^{-n}\right]$
$a^n f[n]$	$F(z/a)$
$nf[n]$	$-z\dfrac{dF(z)}{dz}$
$f[n/k]$, k um inteiro positivo	$F(z^k)$
$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$
$f[n] = \sum_{k=0}^{n} f[k]$	$\dfrac{z}{z-1}F(z)$

Valor Inicial: $f[0] = \lim_{z\to\infty} F(z)$

Valor Final: $f[\infty] := \lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$, se $f[\infty]$ existir