Séries de Fourier

Os fenómenos periódicos aparecem nas mais variadas situações: ondas de som, movimento da Terra, batimento cardíaco, ...

Frequentemente uma função periódica pode ser representada por meio de funções periódicas simples, nomeadamente, cosseno e seno, sob a forma de uma série chamada série de Fourier da função.

Suponhamos que f é uma função que pode ser representada por uma série trigonométrica da forma

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(\frac{2n\pi x}{T}) + B_n \mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{T})]. \tag{1}$$

A série (1) tem período T. Assim sempre que a série (1) representa uma função, representa uma função periódica com período T, isto é, a função deve satisfazer

$$f(x+T) = f(x).$$

Precisemos a definição de função periódica.

Se existe uma constante positiva T tal que $$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$ então f diz-se periódica, com período T.

Exemplo 1: A função sen$x$ é periódica com período 2π uma vez que

$$\mathrm{sen}(x+2\pi) = \mathrm{sen}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2: A função $\mathrm{sen}(n\pi x/L), n \in \mathbb{N}, L > 0$ é periódica com período $2L/n$, pois

$$\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}(x+\frac{2L}{n})) = \mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi 2L}{nL}) = \mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L} + 2\pi) = \mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L}).$$

Note que se f é periódica com período T, então é também periódica com período $2T, 3T, 4T, \ldots$. Por exemplo,

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

O menor real positivo que torna verdadeira a igualdade anterior é chamado **período fundamental**.

Vamos determinar agora os coeficentes A_n, B_n em (1). Suponhamos que a série (1) representa uma dada função $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, periódica, de período T. Temos então que

$$\boxed{f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(\frac{2n\pi x}{T}) + B_n \mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{T})].} \tag{2}$$

Seja x_o uma constante. Integrando ambos os termos de (2) entre x_o e x_o+T e admitindo que $\sum_{n=1}^{\infty}$ comuta com $\int_{x_o}^{x_o+T}$, obtém-se

$$\int_{x_o}^{x_o+T} f(x)dx = \int_{x_o}^{x_o+T} A_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \int_{x_o}^{x_o+T} \cos(\frac{2n\pi x}{T})dx + B_n \int_{x_o}^{x_o+T} \mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{T})dx\right),$$

ou ainda

$$\int_{x_o}^{x_o+T} f(x)dx = A_0 T, \tag{3}$$

uma vez que

$$\int_{x_o}^{x_o+T} \cos(\frac{2n\pi x}{T})dx = \int_{x_o}^{x_o+T} \mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{T})dx = 0$$

De (3) vem

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{T}\int_{x_o}^{x_o+T} f(x)dx.} \tag{4}$$

Seja m um inteiro positivo. Multiplicando ambos os membros de (2) por $\cos(\frac{2m\pi x}{T})$, integrando em seguida entre x_o e x_o+T e supondo uma vez mais que $\sum_{n=1}^{\infty}$ comuta com $\int_{x_o}^{x_o+T}$, vem

$$\begin{aligned}\int_{x_o}^{x_o+T} f(x)\cos(\frac{2m\pi x}{T})dx &= A_0\int_{x_o}^{x_o+T}\cos(\frac{2m\pi x}{T})dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\int_{x_o}^{x_o+T}\cos(\frac{2n\pi x}{T})\cos(\frac{2m\pi x}{T})dx\right.\\ &\left. +B_n\int_{x_o}^{x_o+T}\mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{T})\cos(\frac{2m\pi x}{T})dx\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Atendendo a que

$$\int_{x_o}^{x_o+T}\mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{T})\cos(\frac{2m\pi x}{T})dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e

$$\int_{x_o}^{x_o+T}\cos(\frac{2n\pi x}{T})\cos(\frac{2m\pi x}{T})dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ T/2, & \text{se } n = m,\end{cases}$$

a igualdade (5) reduz-se a

$$\int_{x_o}^{x_o+T} f(x)\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = A_m(T/2). \tag{6}$$

De (6), obtém-se

$$\boxed{A_m = \frac{2}{T}\int_{x_o}^{x_o+T} f(x)\cos(\frac{2m\pi x}{T})dx, \quad m = 1, 2, 3, \ldots} \tag{7}$$

Por meio de um raciocínio análogo, mas multiplicando por $\mathrm{sen}(\frac{2m\pi x}{T})$ ambos os membros de (2) e integrando em seguida, obtém-se

$$\boxed{B_m = \frac{2}{T}\int_{x_o}^{x_o+T} f(x)\mathrm{sen}(\frac{2m\pi x}{T})dx, \quad m = 1, 2, 3, \ldots} \tag{8}$$

A série (1) diz-se a **série de Fourier de** f e os coeficientes A_0, A_n, B_n, $n = 1, 2, ...$, dados por (4), (7) e (8) dizem-se **coeficientes de Fourier de** f.

Exemplo 3: Determinar a série de Fourier da função definida no intervalo [-1,1] por,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta função pode ser encarada como uma restrição de uma função periódica, definida em todo o $\mathbb{R}$, de período 2.

Os coeficientes de Fourier são dados por

$$A_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (-1)dx + \int_{0}^{1} (1)dx = -1 + 1 = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0} (-\cos(n\pi x))dx + \int_{0}^{1} \cos(n\pi x)dx = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\text{sen}(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0} (-\text{sen}(n\pi x))dx + \int_{0}^{1} \text{sen}(n\pi x)dx \\ &= \frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi x)]_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi x)]_{0}^{1} = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)), n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Temos então que a série de Fourier da função f é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))\text{sen}(n\pi x).$$

Em (2) suposemos que uma dada função era representada por uma série de Fourier. Sob quais circunstâncias uma função é igual à sua série de Fourier? Para dar resposta a esta questão, vamos precisar da definição de função seccionalmente contínua.

> Uma função $f(x)$ diz-se **seccionalmente contínua** no intervalo $]-L, L[$, se $f(x)$ está definida em $]-L, L[$ excepto possivelmente num número finito de pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ com $-L < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < L$, $f(x)$ é contínua em cada sub-intervalo $]-L, x_1[,]x_1, x_2[, \ldots,]x_{n-1}, x_n[,]x_n, L[$, existem os limites de $f(x)$ à esquerda e à direita em cada ponto $x_j,\ j = 1, \ldots, n$ e também os limites de $f(x)$ à esquerda de L e à direita de $-L$.

Os limites à direita e à esquerda de um ponto x_0 são definidos respectivamente por

$$f(x_0+) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h) \quad \text{e} \quad f(x_0-) = \lim_{h \to 0^-} f(x+h)$$

Exemplo 4: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

Apesar de f ser descontínua nos pontos $x = 1$ e $x = 2$ no intervalo $0 < x < 3$, ela é seccionalmente contínua nesse intervalo. Isto acontece porque os limites à esquerda e à direita existem em cada um dos pontos extremos dos três sub-intervalos abertos onde f é contínua. Por exemplo $f(1-) = 1$ e $f(1+) = -1$.

Exemplo 5: A função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $0 < x < 1$ é contínua mas não é seccionalmente contínua porque f(0+) não existe.

Teorema: Seja $f(x)$ uma função periódica e que em cada intervalo limitado é seccionalmente contínua e tem apenas um número finito de extremos locais. Então a série de Fourier de f converge, em cada ponto x, para a média dos limites laterais no ponto x.

Note que se $f(x)$ é contínua em x_0, tem-se

$$f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0) \text{ e portanto, } f(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

Seja F uma extensão de f a todo o $\mathbb{R}$ tal que F é periódica de período $2L$, isto é, a função F coincide com a função f no intervalo $]-L, L[$ e o seu gráfico é repetido cada $2L$ unidades ao longo do eixo dos xx. A função F é dita uma **extensão periódica** de f, com período $2L$.

Assim, dizer que a série de Fourier converge para $f(x)$ no intervalo $-L < x < L$ significa também que a série de Fourier converge para uma extensão periódica de f, com período $2L$.

Do teorema anterior obtemos então de imediato que:

Seja $f(x)$ uma função seccionalmente contínua num intervalo $]-L, L[$, onde tem apenas um número finito de extremos locais. Então a série de Fourier de f, dada por

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + B_n \text{sen}(\frac{n\pi x}{L})], \tag{9}$$

onde

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\tfrac{n\pi x}{L})dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}(\tfrac{n\pi x}{L})dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

converge em cada ponto $x_0 \in]-L, L[$ para $\frac{1}{2}[f(x_0-) + f(x_0+)]$.

A série de Fourier de $f(x)$ no intervalo $[-L, L]$ converge, nos pontos $-L$ e L, para o mesmo valor. Com efeito, fazendo $x = -L$ ou $x = L$ em (2), obtém-se o mesmo resultado

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi).$$

Exemplo 6: Estude a convergência da série de Fourier da função $f(x)$ no intervalo

$[-3,3]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \leq x < -1 \\ |x|, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x+6, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Devido à continuidade de f, em cada intervalo aberto, para cada x_0 pertencente a esses intervalos a série converge para $f(x_0)$. Nos extremos temos respectivamente o seguinte:

$x_0 = -3$	converge para	5	$x_0 = -1$	converge para	1
$x_0 = 0$	converge para	0	$x_0 = 2$	converge para	6
$x_0 = 3$	converge para	5			

Exemplo 7: Consideremos a série de Fourier da função $f(x)$ definida no intervalo fundamental $-\pi < x < \pi$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

O gráfico da função f é o indicado na figura da esquerda.

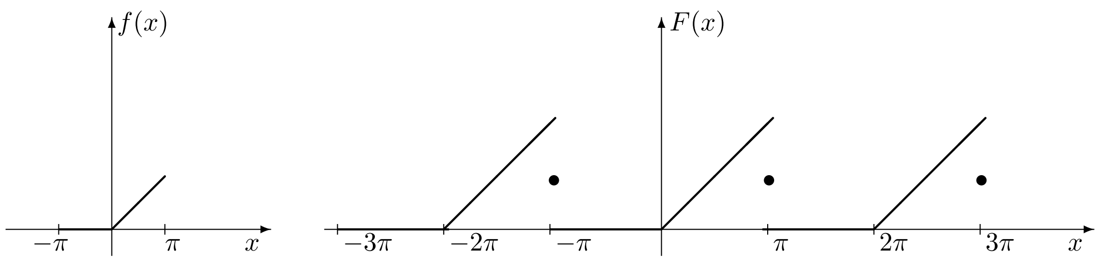

Figure 1: Representações gráficas de f e F

A série de Fourier converge para $f(x)$ no intervalo fundamental, assim como a extensão periódica $F(x)$, indicada na figura da direita. A série deve convergir para o valor médio dos extremos dos intervalos da extensão periódica em cada uma das extremidades $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$. Aqui o valor médio é $\pi/2$, como está assinalado na figura.

Observemos que se $g(x)$ é uma função **par** em $[-L, L]$, isto é, $g(-x) = g(x)$, $x \in [-L, L]$, então

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx = 2\int_{0}^{L} g(x)dx$$

Se $g(x)$ é uma função **ímpar** em $[-L, L]$, isto é, $g(-x) = -g(x)$, $x \in [-L, L]$, então

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0.$$

O produto de duas funções pares ou de duas funcões ímpares é uma função par, enquanto que o produto de uma função par por uma ímpar é uma função ímpar.

Se uma função $f(x)$ é impar em $[-L, L]$ então

$$\begin{aligned} A_n &= 0 \\ B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx \end{aligned}$$

Justifique.
Se uma função $f(x)$ é par em $[-L, L]$ então

$$\begin{aligned} B_n &= 0 \\ A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \end{aligned}$$

Justifique.

Se $f(x)$ é uma função par então a sua série de Fourier é dada por

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi x}{L}), \tag{10}$$

com

$$\begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \\ A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \end{array} \tag{11}$$

A série (10) é chamada a **série de Fourier de cossenos**.

Se $f(x)$ é uma função ímpar então a sua série de Fourier é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L}), \tag{12}$$

com

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx \tag{13}$$

A série (12) é chamada a **série de Fourier de senos**.

Seja agora uma função real

$$f(t),\ t \in [0, L] \tag{14}$$

limitada e com um número finito de extremos locais e de descontinuidades (todas de primeira espécie). Considerando a sua extensão par ao intervalo $[-L, L]$, obtemos o desenvolvimento em série de cossenos da função (14) como dado por (10) e (11).

Analogamente, considerando a extensão ímpar da funcão (14) a $[-L, L]$, obtemos o desenvolvimento em série de senos como em (12) e (13). (Qual será o valor dessa série no ponto $t = L$? Em que pontos t do intervalo $[0, L]$ é que a soma da série é dada por $f(t)$?)