

Soluções da Ficha Prática nº 1 – Números complexos

1. (a) $1 + 6i$ (c) $-4 - 4i$ (d) $-26 - 2i$ (e) $-\frac{11}{5} + \frac{13}{5}i$ (g) $-\frac{3}{2} + \frac{7}{6}i$
 (i) $-5 + 12i$ (j) $12 - 16i$ (k) $3 + 4i$

8. (a) $\operatorname{Re} z = \frac{2}{13}$; $\operatorname{Im} z = \frac{-3}{13}$ (b) $\operatorname{Re} z = \frac{4}{25}$; $\operatorname{Im} z = \frac{3}{25}$ (c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{13}$; $\operatorname{Im} z = \frac{5}{13}$

(d) $\operatorname{Re} z = -1$; $\operatorname{Im} z = -1$ (e) $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = -1$ (f) $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = 1$

(g) $\operatorname{Re} z = \frac{-23 - 2\sqrt{2}}{6}$; $\operatorname{Im} z = \frac{2\sqrt{2} - 5}{6}$ (h) $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = -1/2$

(i) $\operatorname{Re} z = -1$; $\operatorname{Im} z = 0$

13. a) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; b) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$;

c) $z = 2 \left[\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right]$; d) $z = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right]$.

18. a) $\sqrt{377/5}$

21. a) 0; b) $\frac{3}{5}$.

25. c) $(\sqrt{3} + i)/2, (-\sqrt{3} + i)/2, -i$; e) $\pm \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}, \pm \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt[4]{8}}$.

26. a) $P(z) = (z + 2)(z - 2)(z + 1 + i\sqrt{3})(z + 1 - i\sqrt{3})(z - 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3})$;

d) $P(z) = 5 \left(z + \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \right) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} \right) \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} \right)$.

29. a) $z = 1 + i \vee z = 1 - i$ d) $z = \cos \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3$

f) $\sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4$.

29. a) $(3 - 8i)^4 / (1 - i)^{10}$

31. a) $e^2(\cos 1 + i \sin 1)$

32. c) $2\sqrt{3} e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2\sqrt{3} e^{\frac{5\pi i}{3}}$ e) $2 e^{\frac{2\pi i}{3}}$ f) $3 e^{-\pi i}$

37. i) $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) < \frac{1}{4} \iff \operatorname{Re} \left(\frac{z}{z^2} \right) < \frac{1}{4} \iff \frac{x}{x^2 + y^2} < \frac{1}{4} \iff x^2 + y^2 - 4x > 0 \iff (x - 2)^2 + y^2 > 4$.

Logo, o conjunto em questão é o exterior do círculo de centro $z_0 = 2$ e raio 2.

38. b) Mediatriz do segmento $[-5, 1 + i]$; f) Mediatriz do segmento $[0, i]$;

d) Mediatriz do segmento $[-3 + i, -4i]$. Note que $|z - 4i| = |z - 4i| = |z + 4i|$.

39. a) Elipse de focos i e -2 , excentricidade $\sqrt{5/3}$.

c) Círculo de raio $\sqrt{32}/3$ e centro $(2 + 8i)/3$, equação $3x^2 + 3y^2 + 4x + 16y + 12 = 0$.

d) Parábola de equação $y^2 + 2x - 1 = 0$.

40. b) É fechado e conexo. c) É fechado e limitado, logo compacto.

e) É conexo e limitado.

Soluções da Ficha Prática nº 2 – Funções de variável complexa

1. b) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + iy) = \frac{3(x - 5)}{(x - 5)^2 + y^2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x + iy) = \frac{-3y}{(x - 5)^2 + y^2}$

d) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + iy) = e^x (x \cos y + (1 - y) \sin y)$

$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x + iy) = e^x (x \sin y + (y - 1) \cos y)$

e) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + iy) = \frac{x\sqrt{10x^2 + 10y^2 - 12xy}}{x^2 + (y - 1)^2}$

$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x + iy) = \frac{(1 - y)\sqrt{10x^2 + 10y^2 - 12xy}}{x^2 + (y - 1)^2}$

2. (a) $\mathbb{C} \setminus (\{i\} \cup \{x + ik\pi \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\})$

(b) $\{x + iy : x \neq 0\}$

(c) $\mathbb{C} \setminus (\{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x + i(\frac{\pi}{2} + k\pi) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\})$

7. (a) $f'(z) = -2z + 20iz^4$

(b) $f'(z) = (z^2 - 3)^4(iz + 3)(12iz^2 + 30z - 6i)$

(c) $f'(z) = \frac{(2 - 2i)z^4 - 18iz^2 - (12 + 6i)z}{(2z^3 - iz^2 + 3i)^2}$

21. (a) $\frac{\sin(n\theta/2) \sin((n + 1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

(b) $\frac{\sin((n + 1)\phi/2) \cos(\theta + n\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$

22. (b) $z = (2n \pm 1/3)i\pi, n \in \mathbb{Z}$

23. $z = (n + 1/2)\pi + i \tanh^{-1}(1/2)$

25. (a) f é inteira com $f'(z) = \sinh z$;

(c) f é diferenciável apenas em $z = n\pi + \pi/2, n \in \mathbb{Z}$, com $f'(n\pi + \pi/2) = 0$.

26. (a) $y^2 - x^2 - 2y + c$ com c real; (b) $2iz - z^2 + c$ com c real.

27. $ze^{-z} + 1$

Soluções da Ficha Prática nº 3 – Integração de funções complexas

2. (a) $-2r^2$; (b) $-2ir^2$.

3. (a) $\frac{2r\sqrt{2r}i}{3} - 2r^2$; (b) $-4/3$; (c) $4i/3$.

4. $(28 + 23i)/6$.

5. (a) $-(16 + 21i)/6$; (b) $-(4 + 3i)/6$; (b) $4i/3$.

6. $2\pi ir$.

12. (a) $3\pi i/2$ (b) $-i\pi/2$

Soluções da Ficha Prática nº 5 – Resíduos e Integrais

1. (a) $z = 0, i, -i$, de ordens 1,2,2;
 (b) $z = 0$, de ordem 2;
 (c) $z = 0$, de ordem 3; $z = n$, com $n \in \mathbb{Z}$, de ordens 2;
 (d) $z = 0$, de ordem 3; $z = n\pi - 1$ (n inteiro), de ordens 1;
 (e) $z = 2k\pi$ (k inteiro), de ordens 2;
 (f) $z = 0$, de ordem 2; $z = 2k\pi i$ (k inteiro não nulo), de ordem 1.

2. $\frac{1}{z-i} - \frac{i}{(z-i)^2}$.

11. (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$; (b) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$; (c) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$; (d) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

12. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

15. (a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$; (d) $\frac{-\pi}{27}$; (e) $\frac{\pi}{4a}$.

16. (a) $\frac{\pi e^{-2a}}{4}$; (b) $\frac{\pi e^{-4(2\cos 2 + \sin 2)}}{2}$; (c) $\frac{\pi(1-e^{-a})}{a^2}$; (d) $\frac{\pi}{4e}$.