

Ficha Prática nº 8
Transformada- z

1. Mostre que a transformada- z é linear.
2. Determine a transformada- z da função discreta de passo unitário $u[n]$, usando a definição.
3. Determine a transformada- z da função $f[n] = a^n$, usando a definição.
4. Expresse a transformada- z das funções seguintes como uma função racional.
 - (a) 0.9^n
 - (b) $2(0.8)^n + 3(1.1)^n$
 - (c) $3e^{-0.1n}$
 - (d) $3e^{-i0.1n}$
 - (e) $\cos(0.5n)$
 - (f) $20 \cos(0.5n - \pi/4)$
 - (g) $10e^{-0.2n} \cos(0.5n - \pi/4)$
 - (h) $5(-0.9)^n \cos(0.5n)$
5. Cada uma das expressões seguintes expressa um sinal que aparece a cada 0.1 s, começando em $t = 0$. Determine transformada- z de cada um desses sinais expressando-a como uma função racional.
 - (a) e^{-t}
 - (b) $2e^{-t} + 3e^{-0.5t}$
 - (c) $3e^{-0.1t}$
 - (d) $3e^{-it}$
 - (e) $\cos t$
 - (f) $10e^{-t} \cos t$
6. O sinal e^{-t} aparece a cada 0.2 s, começando em $t = 0$. Determine a sua transformada- z .
7. Usando a definição da transformada- z , deduza $\mathcal{Z}\{\delta[n]\}$.
8. Prove a seguinte propriedade da transformada- z , para $n_0 \geq 0$:

$$\mathcal{Z}\{f[n - n_0]u[n - n_0]\} = z^{-n_0} \mathcal{Z}\{f[n]\}.$$

9. Resolva a seguinte equação às diferenças:

$$y[n] - 0.9y[n - 1] = 0.1u[n]$$

10. Use a transformada- z para calcular a soma x das séries.

$$(a) x = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n \quad (b) x = \sum_{n=2}^{\infty} 0.5^n \quad (c) x = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n \cos(0.1n)$$

11. A transformada- z da função discreta $f[n]$ é dada por $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$
- (a) Determine $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$.
- (b) Determine a transformada- z inversa de $F(z)$ e averigue se se verifica a igualdade do valor final. Comente o resultado.
12. Dada $f[n] = a^n u[n]$, determine a transformada- z de:
- (a) $f[n/2]$ (b) $f[n-2]u[n-2]$ (c) $f[n+2]u[n]$ (d) $b^n f[n]$
13. Determine a transformada- z inversa de cada uma das seguintes funções:
- (a) $X(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}$ (b) $X(z) = \frac{0.5}{(z-1)(z-0.5)}$
- (c) $X(z) = \frac{0.5(z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$ (d) $X(z) = \frac{0.5z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$
- (e) $X(z) = \frac{0.5}{z(z-1)(z-0.5)}$ (f) $X(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$
14. Sabendo que $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$, considere a equação às diferenças
- $$y[n] - 4y[n-1] + 3y[n-2] = x[n]$$
- (a) Determine $y[n]$, usando transformadas- z .
- (b) Verifique os resultados da alínea anterior para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ resolvendo a equação às diferenças iterativamente.
15. Considere a equação às diferenças $y[n] - 0.75y[n-1] + 0.125y[n-2] = x[n]$, onde $x[n]$ é como no exercício anterior.
- (a) Determine $y[n]$, usando transformadas- z .
- (b) Verifique os resultados da alínea anterior para $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 4$ resolvendo a equação às diferenças iterativamente.
- (c) Verifique o valor de $y[0]$ obtido em (a), usando a propriedade do valor inicial.
- (d) Pode aplicar a propriedade do valor final para obter o valor correcto de $y[\infty]$? Se a sua resposta é sim, determine o valor final. Caso contrário, justifique a não aplicabilidade desta propriedade.
16. Faça o mesmo que no exercício anterior para a equação às diferenças $y[n] - y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n]$, onde $x[n]$ é definido como atrás.
17. Sendo $U(z)$ a transformada- z da sucessão (u_n) , prove que a transformada- z da sucessão (u_{n+r}) é $z^r U(z) - z^r u_0 - z^{r-1} u_1 - \dots - z u_{r-1}$.
18. Prove que $Z[(n)] = \frac{z}{(z-1)^2}$.
19. Sendo $W(z) = \frac{z^2}{z^2 - 4}$, determine (w_n) tal que $Z[(w_n)] = W(z)$ por dois processos:
- (a) decompondo $\frac{z}{z^2 - 4}$ em soma de fracções parciais;

(b) calculando $(u_n) \star (v_n)$, onde $Z[(u_n)] = \frac{z}{z+2}$.