DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
Métodos de Análise Complexa
Eng. de Sistemas e Informática

Ficha Prática nº 7
Transformadas de Fourier

1. Determine a transformada de Fourier de cada uma das seguintes funções.
   (a) $x(t) = u(t) - u(t-5)$
   (b) $x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-5)]$
   (c) $x(t) = t[u(t) - u(t-5)]$
   (d) $x(t) = \sin(2\pi t)[u(t+1) - u(t-1)]$
   (e) $x(t) = \cos(2\pi t)[u(t+1) - u(t-1)]$

2. Use a transformada de Fourier da função $e^{i\omega_0 t}$ para determinar a transformada de Fourier das seguintes funções:
   (a) $\sin \omega_0 t$ (b) $\cos \omega_0 t$

3. Prove as seguintes propriedades da transformada de Fourier, onde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$:
   (a) $\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$ (b) $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = F(\omega)e^{-i\omega\tau}$
   (c) $\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$, (d) $\mathcal{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$
   (e) $\mathcal{F}\{\frac{d^n[f(t)]}{dt^n}\} = i\omega)^n F(\omega)$ (f) $\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\}\mathcal{F}\{f_2(t)\}$

4. Use a transformada de Fourier de $\cos \omega_0 t$ e a propriedade da diferenciação para calcular a transformada de Fourier de $\sin \omega_0 t$.

5. Determine a transformada de Fourier das seguintes funções:
   (a) $e^{\beta t}\cos(\omega_0 t)u(t), \quad \mathrm{Re}(\beta) > 0$ (b) $A\sin(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t)$
   (c) $(1 - e^{-t})u(t)$ (d) $10\mathrm{rect}[(t-1)/2]$

6. Determine a transformada de Fourier de cada um dos sinais da Figura 3.

7. Sabendo que
$$e^{-|t|} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{2}{\omega^2 + 1}$$
   determine as transformadas de Fourier de:
   (a) $\frac{d}{dt}e^{-|t|}$ (b) $\frac{1}{t^2+1}$ (c) $\frac{\cos t}{t^2+1}$

8. Uma função $g(t)$ tem a seguinte transformada de Fourier

$$G(w) = \frac{iw}{-\omega^2 + 5i\omega + 6}$$

Determine a transformada de Fourier de:

(a) $g(2t)$ (b) $g(3t-6)$

(c) $\frac{dg(t)}{dt}$ (d) $g(-t)$

(e) $e^{-i100t}g(t)$ (f) $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$

9. Determine a transformada de Fourier de cada uma das funções seguintes e em seguida represente-a por meio do seu integral de Fourier.

(a) $f(t) = \begin{cases} e^{at} & \Leftrightarrow t \leq 0 \\ e^{-at} & \Leftrightarrow t \geq 0 \end{cases} \quad a > 0$

(b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ e^{-at} & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad a > 0$

(c) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{se } t^2 \leq \pi^2 \\ 0 & \text{se } t^2 \geq \pi^2 \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{se } t^2 \leq \pi^2/4 \\ 0 & \text{se } t^2 \geq \pi^2/4 \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow -\infty < t < 0 \\ 1 & \Leftrightarrow 0 < t < 1 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 < t < \infty \end{cases}$

(f) $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \\ 0 & \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \end{cases}$

10. Determine a representação em integral de Fourier da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -1 \\ -1, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < \infty \end{cases}$$

e expresse o integral que aproxima esta função para frequências entre 0 e ω_0 em termos de uma função em integral de seno.

11. Faça o mesmo que no exercício anterior para a função

$$f(t) = \begin{cases} t & \Leftrightarrow t^2 < 1 \\ 0 \Leftrightarrow t^2 > 1 \end{cases}$$

12. Determine a transformada de Fourier em cosseno e a transformada de Fourier em seno da função $f(t) = e^{-at}$, onde $a, t > 0$.

13. Considere a função f definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| \leq a \\ 0 & \text{para } |t| > a \end{cases}$$

onde a é uma constante positiva.

(a) Determine a transformada de Fourier de f.

(b) Use a alínea anterior e o teorema da inversão para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at)\cos(at/2)}{t}\, dt\ .$$

14. (a) Determine $\mathcal{F}(e^{-|t|})$ usando a definição.

(b) Use a alínea anterior e o teorema do integral de Fourier inverso para determinar

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt$ (ii) $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)$

15. Use teoria dos resíduos para determinar

(a) $\mathcal{F}\left(\dfrac{t}{t^2+a^2}\right)$

(b) $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{(1+t^2)^2}\right)$

16. Seja

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{se } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } t > \pi/2 \end{cases}$$

(a) Determine a transformada de Fourier em seno de f.

(b) Use a alínea anterior e o teorema da inversão para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{t\sin(\pi t/4)\cos(\pi t/2)}{1-t^2}\, dt\ .$$

17. Determine a transformada de Fourier em cosseno de $f(t) = e^{-t}\cos t$. Em seguida, calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{(2+t^2)\cos at}{4+t^4}\, dt \qquad (a \in \mathbb{R}^+)\,.$$

18. Seja $f(t) = e^{-t^2/2}$. Sabendo que $\mathcal{F}(f(t)) = e^{-s^2/2}$, use a propriedade $\mathcal{F}(tf(t)) = i\hat{f}'(s)$ para calcular $\mathcal{F}_s(te^{-t^2/2})$. Em seguida, determine $\int_0^{\infty} te^{-t^2/2}\sin 4t\, dt$.

19. Seja $f(t) = \begin{cases} t & \text{para } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{para } |t| > 1 \end{cases}$.

Determine $\mathcal{F}(f(t))$ e, em seguida, use a identidade de Parseval para concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{-4}(t\cos t - \sin t)^2 dt = \pi/3\,.$$

20. Seja $f(t) = e^{-at}$ onde a é uma constante real positiva. Calcule $\hat{f}_c(s) + i\hat{f}_s(s)$ e conclua que

$$\hat{f}_c(s) = \frac{2a}{a^2+s^2} \quad \text{e } \hat{f}_s = \frac{2s}{a^2+s^2}\,.$$

Conclua, em seguida, que

$$\int_0^\infty \frac{a\cos st}{s^2+a^2}\,ds = \int_0^\infty \frac{s\sin st}{s^2+a^2}\,ds = \frac{\pi}{2}e^{-at} \quad (t>0)\,.$$

21. Seja $f(t) = e^{-at}$ e $g(t) = \begin{cases} a & \text{para } 0<t<b \\ 0 & \text{para } t>b \end{cases}$ onde a e b são constantes positivas.

(a) Determine a transformada de Fourier em cosseno de g.

(b) Use as identidades de Parseval e o exercício anterior para calcular

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{\sin bt}{t(t^2+a^2)}\,dt\,.$$

22. Sendo k uma constante real positiva:

(a) Determine $\mathcal{F}(e^{-k|t|})$

(b) Use transformadas de Fourier para resolver a equação integral

$$f(t) = e^{-|t|} + \frac{1}{2}(1-k^2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-u|}f(u)du\,.$$

23. (a) Mostre que, sob condições adequadas, $\mathcal{F}(f''(t)) = -s^2\hat{f}(s)$.

(b) Sabendo que $\mathcal{F}(e^{-t^2/2}) = e^{-s^2/2}$, resolva a equação integral

$$e^{-t^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-u|}f(u)du\,.$$

24. Seja $f(t) = \begin{cases} e^{-at}g(t) & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}.$

Determine a relação existente entre a transformada de Fourier de $f(t)$ e a transformada de Laplace de $g(t)$.

25. Determine a transformada de Laplace bilateral de cada uma das funções seguintes:

    (a) $f(t) = e^{-10t}u(t) + e^{5t}u(-t)$
    (b) $f(t) = e^{10t}u(t) + e^{-5t}u(-t)$
    (c) $f(t) = e^{10t}u(t) + e^{5t}u(-t)$
    (d) $f(t) = e^{-10t}u(t) + e^{-5t}u(-t)$

26. Determine a transformada de Laplace bilateral de cada uma das funções seguintes, indicando os valores da variável s para os quais ela está definida.

    (a) $e^{-2t}u(t)$ (b) $e^{-2t}u(t-1)$
    (c) $e^{-2t}u(-t-1)$ (d) $e^{-2t}u(-t)$
    (e) $e^{-2t}u(t+1)$ (f) $e^{-2t}u(-t+1)$

27. Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} e^{5t}, & -1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Determine a transformada de Laplace bilateral da função f, indicando os valores da variável s para os quais ela está definida, de duas maneiras diferentes:

   (a) Usando a definição de transformada de Laplace bilateral.
   (b) Usando uma tabela de transformadas de Laplace.