DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
Métodos de Análise Complexa
Eng. de Sistemas e Informática

Ficha Prática nº 4
Séries de Potências

1. Usando o critério de Weierstrass, mostre que as séries seguintes convergem uniformemente em $|z| \leq r < 1$:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos 3n}{1+5n}\, z^n$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3\cos n}{10n^2+7}\, z^{2n-1}$.

2. Supondo que (a_n) convirja, prove que $\sum a_n z^n$ converge uniformemente em $|z| \leq r < 1$.

3. Derivando e integrando a série
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,,$$
obtenha, para $|z| \leq \delta < 1$, os desenvolvimentos:

   (a) $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$;

   (b) $\displaystyle\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, onde $\ln(1-z)$ é a determinação do logaritmo que corresponde a $\ln 1 = 0$.

4. Proceda de forma análoga ao feito no exercício anterior para mostrar que:

   (a) $\displaystyle\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$;

   (b) $\displaystyle\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$, $|z| < 1$.

5. Obtenha os desenvolvimentos em séries de potências de $z-3$ e $z-(-4)$ da função $1/z$. Determine o raio de convergência.

6. Obtenha os desenvolvimentos em séries de potências de z e de $(z+i)$ da função $(2z-3)^{-1}$. Determine os raios de convergência e represente graficamente as bolas de convergência.

7. Determine os raios de convergência das seguintes séries:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$;

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(3n^2+5)(z+i)^n$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n)z^n$.

8. Obtenha os seguintes desenvolvimentos, válidos para todo o z:

   (a) $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$;

   (b) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$;

   (c) $\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

   (d) $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

9. Mostre que o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\sin^{-1} z$ para a determinação $\sin^{-1} 0 = 0$ é dado por:

$$\sin^{-1} z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} z^{2n+1}$$

   para $|z| < 1$.

10. Obtenha as séries de potências de z das seguintes funções:

    (a) $\cos^{-1} z$; (b) $tan^{-1}z$; (c) $\frac{1+z}{\sqrt[3]{1-z^2}}$.

    Considere as determinações dadas para $\cos^{-1} 0 = 1$, $\tan 0 = 0$ e $\sqrt[3]{1} = 1$.

11. Desenvolva em série de potências de $z-1$ a determinação principal ($\ln 1 = 0$) de $f(z) = z \ln z - z$.

12. Desenvolva em série de potências de $z-4$ a função

$$g(z) = \frac{1}{z^5}$$

    e represente graficamente a sua bola de convergência.

    Sugestão: Aplique o desenvolvimento binomial, notando que $z = 4 + (z-4)$.

13. Desenvolva em séries de potências de z as funções

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$; (b) $g(z) = \dfrac{z}{(z+i)^2(z-1)}$.

Sugestão: Use decomposição em frações simples.

14. Mostre que $\sin z = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j}}{(2j-1)!}(z - n\pi)^{2j+1}$, onde n é um inteiro qualquer.

15. Obtenha o desenvolvimento de $\cos z$ em potências de $(z - n\pi - \pi/2)$, onde n é um inteiro qualquer.

16. Demonstre que o desenvolvimento de uma função par (ímpar) em potências de z só contém potências pares (ímpares).

17. Obtenha as séries de Laurent nos seguintes casos

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_o = 1$, $0 < |z-1| < 1$;

(b) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_o = 1$, $1 < |z-1|$;

(c) $f(z) = \dfrac{z^5}{z-1}$, $z_o = 0$, $1 < |z|$;

(d) $f(z) = z^5 e^{1/z}$, $z_o = 0$, $1 < |z|$.

18. Demonstre que uma função analítica no plano estendido (incluindo $z = \infty$) é necessariamente constante.

19. Seja f uma função regular no ponto z_o. Mostre que z_o é um zero de ordem m de f se e só se

$$f(z_o) = f'(z_o) = \ldots = f^{(m-1)}(z_o) \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_o) \neq 0\,.$$

20. Mostre que as funções

$$(\cos z - 1)^3 \sin z \quad \text{e} \quad (e^z - 1 - z)^3 \sin^2 z$$

possuem zeros de ordem 7 e 8, respectivamente, no ponto $z = 0$.

21. Determine a ordem do zero $z = 0$ das seguintes funções:

(a) $e^{\sin z} - e^z$; (b) $(e^{z^2} - 1)(\sin z^2 - z^2)$; (c) $e^{\sin z} - e^{\tan z}$.

22. Determine os zeros e as respectivas ordens das seguintes funções:

(a) $z^2 \sin z$; (b) $(\cos z - 1)\ln(1+z)$; (c) $(z^2 - 4)^2(e^z - 1)$.