INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
Métodos de Análise Complexa
Eng. de Sistemas e Informática

Ficha Prática nº 3
Integrais de funções complexas

1. Relativamente aos arcos de equações dadas a seguir, faça os gráficos e indique as orientações em cada caso.

   (a) $z = 3t + it^2; \quad -\infty < t < \infty;$
   (b) $z = r(\cos t + i \sin t), \quad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi,\ r > 0;$
   (c) $z = \frac{1}{t} + it, \quad 1 \leq t < \infty;$
   (d) $z = t + \frac{2i}{t}, \quad -\infty < t < 0;$
   (e) $z = t + i\sqrt{1-t^2}\,, \quad -1 \leq t \leq 1;$
   (f) $z = t - i\sqrt{1-t^2}\,, \quad -1 \leq t \leq 1;$
   (g) $z = \sqrt{1-t^2} + it\,, \quad -1 \leq t \leq 1.$

2. Calcule o integral de $|z|$ nos casos seguintes:

   (a) Ao longo da semicircunferência $z = re^{i\theta}, \ 0 \leq \theta \leq \pi;$
   (b) Ao longo da semicircunferência $z = re^{i\theta}, \ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$

3. Calcule o integral $\int_C \sqrt{z}dz$ nos casos seguintes:

   (a) Ao longo da semicircunferência $z = re^{i\theta}, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$
   (b) Ao longo da circunferência $z = e^{i\theta}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi;$
   (c) Ao longo da circunferência $z = e^{i\theta}, \ \pi \leq \theta \leq 3\pi.$

4. Calcule o integral de $x^2 - y^2 + i(x - y^2)$ ao longo do segmento que une a origem ao ponto $3 + 2i$.

5. Calcule o integral $\int_0^{2+i} (y - x^2)dz$:

   (a) Ao longo do eixo $y = 0$ e da recta $x = 2$;
   (b) Ao longo do eixo $x = 0$ e da recta $y = 1$;
   (c) Ao longo do segmento de recta que une 0 a $2 + i$.

6. Calcule o integral

$$\int_C \ln z dz,$$

   onde $C = \{z = re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

7. Sem calcular o integral, mostre que:
   (a) $\left|\int_1^{1+i} \frac{dz}{z}\right| \leq 1$, onde a integrcão é ao longo do segmento $[1, 1+i]$;
   (b) $\left|\int_1^{1+i} \frac{z+2}{z} dz\right| \leq 3$, onde a integrcão é ao longo do segmento $[1, 1+i]$.

8. Mostre que $\int_C z^n dz = 0$, onde n é um inteiro positivo e C équalquer contorno fechado.

9. Seja C a circunferência $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Mostre que
   (a) $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$
   (b) $\int_C \frac{dz}{z^n} = 0$, onde n é um número inteiro ≥ 2.

10. Mostre que
$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\,,$$
onde C é a circunferência de centro em a e raio r.

11. Mostre que
$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = 0\,,$$
onde C é a circunferência de centro em a e raio r e n é um inteiro positivo.

12. Calcule o integral
$$\int_{-i}^{-1} \frac{dz}{z}$$
   (a) ao longo de qualquer contorno C_1 que não passe pelo terceiro quadrante;
   (b) usando um contorno C_2 todo contido no terceiro quadrante.

13. Calcule os integrais seguintes, ao longo de contornos quaisquer ligando os pontos limites indicados:

   (a) $\int_3^{i/\pi} \cos \pi z \, dz$ (b) $\int_\pi^{i\pi} z e^{z^2} \, dz$

14. Calcule o integral
$$\int_C \frac{z}{3z^2+7} \, dz\,,$$
onde C é qualquer contorno ligando $e^{-i\pi/4}$ a $e^{i\pi/4}$ e todo contido no semi-plano $\mathrm{Re}z > 0$.

15. Use a Fórmula de Cauchy para calcular os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{(z^2+1)}{z+2}\,dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{2z+1}\,dz$

16. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2}\,dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3}\,dz$

(c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\ln(z^2+2)}{(3z-2)^2}\,dz$

(Observe que o valor do último integral não depende do ramo particular de $\ln(z^2+2)$ usado na integração.)

17. Calcule os integrais seguintes, onde C é o quadrado de vértices $\pm1\pm i$ e a função $f(z)=\sqrt{z^2+4}$ é determinada pela condição $f(0)=-2$:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2+4z-3}\,dz$

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2-4iz-1}\,dz$

(c) $\displaystyle\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{3z^2-(10+i)z+3(1+i)}\,dz$

18. Sendo $f=u+iv$ uma função analítica numa região R, mostre que u é conjugada harmónica de $-v$.

19. Mostre que $u=x-5xy$ é harmónica em todo o plano. Determine a sua conjugada v e expresse $f=u+iv$ em termos de $z=x+iy$.

20. Mostre que as seguintes funções u são harmónicas numa certa região; determine a função harmónica conjugada e a função $f=u+iv$ em cada caso:

(a) $u=x-4xy$

(b) $u=\sin x\,\cosh y$

(c) $u=x^3-3xy^2$