INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
Métodos de Análise Complexa
Eng. de Sistemas e Informática

Ficha Prática nº 2
Funções de variável complexa

1. Determine a parte real e imaginária de cada uma das seguintes funções:
   (a) $f(z) = z^2 - 5z + 3$ (b) $f(z) = \dfrac{3}{z-5}$ (c) $f(z) = \dfrac{z-4i}{z+3i}$

   (d) $f(z) = e^z(z-i)$ (e) $f(z) = \dfrac{|z-3i\overline{z}|}{z-i}$

2. Determine o domínio de definição das seguintes funções:
   (a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)\sin(\operatorname{Im} z)}$ (b) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{Re} z} - \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$

   (c) $f(z) = \dfrac{z^2 + (z-1)^3}{(e^z - 1)\cos(\operatorname{Im} z)}$

3. Estabeleça os seguintes resultados usando directamente a definição de limite:

   (a) $\lim\limits_{z \to 1+i} (z^2 - 2z) = -2$

   (b) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{5}{z^2+1} = \infty$

4. Seja $f(z)$ uma função com limite L quando $z \to z_o$. Mostre que
$$\lim_{z \to z_o} |f(z)| = |L|.$$

5. Prove que se $f(z) \to 0$ quando $z \to z_o$ e $g(z)$ é limitada numa vizinhança de z_o, então $f(z)g(z) \to 0$ quando $z \to z_o$.

6. Calcule os seguintes limites:
   (a) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^3 - 27}{z-3}$ (b) $\lim\limits_{z \to -2i} \dfrac{z^3 - 8i}{z+2i}$

   (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$ (Sugestão: Multiplique $\sqrt{1+h} + 1$ por ambos os membros da fracção.)

   (d) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{(1+z)^{1/4} - 1}{z}$ (Sugestão: Use a experiência ganha no exercício anterior.)

   (e) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{e^{i(\operatorname{Im} z)}}{z}$

7. Calcule as derivadas das seguintes funções:
   (a) $f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5$

   (b) $f(z) = (z^2 - 3)^5 (iz + 3)^2$

   (c) $f(z) = \dfrac{3i - (1-i)z^2}{2z^3 - iz^2 + 3i}$

8. Mostre que a função $f(z) = \sqrt{|xy|}$, onde $z = x + iy$ satisfaz as Equações de Cauchy-Riemann no ponto 0 mas não tem derivada nesse ponto.

9. Use as Equações de Cauchy-Riemnn para verificar a analiticidade das seguintes funções e, usando as derivadas parciais calculadas, determine a derivada dessa função:

   a) $f(z) = z^2 - 2z$;

   b) $f(z) = (e^y + e^{-y}) \sin x + i(e^y - e^{-y}) \cos x, \qquad$ onde $z = x + iy$;

   c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

10. Mostre que as seguintes funções não são analíticas em ponto algum:

    a) $w = x^2y^2 + 2ix^2y^2 \qquad$ b) $w = e^{i\bar{z}}$;

    c) $w = e^{xy} - e^{-xy} + ixy$.

11. Mostre que as Equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

12. Mostre que as seguintes funções são inteiras:

    a) $f(z) = 4 + x - 3(x^2 - y^2) + iy(1 - 6x)$; $\qquad$ b) $f(z) = e^{iz}$;

    c) $f(z) = x(x^2 - 3y^2 + 7) + iy(3x^2 - y^2 + 7)$.

13. Mostre que a função $\sqrt{z}$ definida por

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right),\ r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\,,$$

    onde $z = re^{i\theta}$, é analítica.

14. Dada a função $f(z) = z^2 = u + iv$, faça o gráfico das curvas das famílias $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes e observe que elas se cruzam em ângulo recto.

15. Faça o mesmo para $f(z) = 1/z$.

16. Estabeleça as igualdades seguintes:

    (a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

    (b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

    (c) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

    (d) $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$

    Sugestão: Em (b) e (c) comece pelos segundos membros, substituindo seno e cosseno em termos da exponencial; em (d) use (b) ou (c).

17. Estabeleça as relações:

    (a) $\sin iz = i \sinh z$; (b) $\cos iz = \cosh z$

18. Estabeleça as seguintes relações:

    (a) $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

    (b) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$

    (c) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

19. Esboce os gráficos das funções reais $y = \sinh x$ e $y = \cosh x$.

20. Seja $z = x + iy$. Mostre que $\left|e^{ie^{\bar{z}}}\right| = e^{e^x \sin y}$.

21. Use as propriedades elementares da função exponencial para calcular os seguintes somatórios (onde $\theta, \phi \in \mathbb{R}$). (Sugestão: Pode usar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.)

    (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

    (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\theta + k)\phi$

22. Usando as definições das funções seno e cosseno hiperbólicos e as propriedades da função exponencial, prove que:

    $$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \,.$$

    (a) Use este resultado para provar que se $z = x + iy$, então

    $$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \,.$$

    (b) Determine as raízes da equação $\cosh z = 1/2$.

23. Seja $z = x + iy$ em $\mathbb{C}$. Determine as partes real e imaginária da função $\tan z$ em termos de x e y. Determine depois todas as raízes da equação $\tan z = 2i$.

24. Determine as imagens dos pontos $A(0, a)$, $B(1/2, a)$, $C(\pi, a)$, $D(3\pi/2, a)$ e $E(2\pi, a)$ no plano complexo, onde $a \in \mathbb{R}^+$, por meio da função $w = \sin z$. Mostre que o sin transforma o segmento de recta $[AE]$ numa elipse, com centro 0.

25. Use as Equações de Cauchy-Riemann para determinar em que pontos as funções seguintes são diferenciáveis e determine as respectivas derivadas nesses pontos:
    (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cosh z$
    (b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z\mathrm{Im}\, z$
    (c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin \overline{z}$

26. Se a parte imaginária de uma função analítica é $2x(1-y)$, determine:
    (a) a parte real;
    (b) a função.

27. Construa uma função analítica $f(z)$ cuja parte real é $e^{-x}(x\cos y + y \sin y)$ e para a qual $f(0) = i$.

28. Prove que não existe nenhuma função analítica cuja parte imaginária seja $x^2 - 2y$.

29. Demonstre que $\ln \dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$ no sentido de igualdade de conjuntos de valores.
    Sugestão: $z = z_1/z_2 \Leftrightarrow z_1 = zz_2$

30. Sendo n inteiro positivo, demonstre que $\ln z^{1/n} = \frac{1}{n} \ln z$, com a mesma interpretação de igualdade de conjuntos de valores.

31. Mostre que $\ln(-1) = (2k+1)\pi i$ e $\ln i = \frac{4k+1}{2}\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

32. Determine todas as raízes das seguintes equações:

    (a) $e^z = -1$; (b) $e^{2z} = -e$; (c) $e^z = -\sqrt{3} + 3i$; (d) $e^{3z-4} = -1$.

33. Prove as propriedades
$$zz^b = z^{a+b} \ z^{-a} = \frac{1}{z}\,, \quad (z)^b = z^{ab}\,,$$
    onde $z \neq 0$ e a e b são números complexos quaisquer.

34. Prove que $|z^r| = |z|^r$, onde $z \neq 0$ e r é um número real qualquer.

35. Mostre que todas as determinações de i^i são reais e dadas por
$$i^i = \exp \frac{-(4k+1)\pi}{2}\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

36. Mostre que $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}$.

37. Mostre que $\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1})$, $\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$ e $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$.