INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
Métodos de Análise Complexa
Eng. de Sistemas e Informática

Ficha Prática nº 1
Números complexos

1. Expresse os seguintes números complexos na forma $a + bi$:
   (a) $(3 + 5i) + (-2 + i)$
   (b) $(-3 + 4i) - (1 - 2i)$
   (c) $(\sqrt{3} - 2i) - i\left(2 - i(\sqrt{3} + 4)\right)$
   (d) $(3 - 5i)(-2 - 4i)$
   (e) $\left(1 + \frac{i}{3}\right)\left(-\frac{6}{5} + 3i\right)$
   (f) $(3i - 1)\left(\frac{i}{2} + \frac{1}{3}\right)$
   (g) $(3i - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\right)$
   (h) $7 - 2i\left(2 - \frac{2i}{5}\right)$
   (i) $(2 + 3i)^2$
   (j) $(4 - 2i)^2$
   (k) $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5$
2. Mostre que $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.
3. Mostre que $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$.
4. Mostre que $(1 + i)^3 = -2 + 2i$.
5. Mostre que $1 + i^5 + 2i^{10} - 3i^{13} = -1 - 2i$.
6. Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.
7. Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$.
8. Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos z:
   (a) $z = \frac{1}{2 + 3i}$
   (b) $z = \frac{1}{4 - 3i}$
   (c) $z = \frac{1 + i}{3 - 2i}$
   (d) $z = \frac{3 - i}{-1 + 2i}$
   (e) $z = \frac{1 - i}{1 + i}$
   (f) $z = \frac{1 + i}{1 - i}$
   (g) $z = \frac{4 - 3i}{-1 + i} - \frac{1 - i}{\sqrt{2} - i}$
   (h) $z = \left(\frac{1}{1 + i}\right)^2$
   (i) $z = \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{30}$
   (j) $z = (1 - i)(\sqrt{3} + i)$
   (k) $z = \frac{1}{i} + \frac{3}{1 + i}$

9. Represente graficamente os números complexos z_1, z_2, $z_1 z_2$ e z_1/z_2 nos seguintes casos:

   (a) $z_1 = 3+4i, \quad z_2 = \frac{1-i}{5\sqrt{2}}$; (b) $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$;

   (c) $z_1 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \quad z_2 = 1+i\sqrt{3}$; (d) $z_1 = 1+2i, \quad z_2 = 2-i$;

   (e) $z_1 = 3-i, \quad z_2 = 3-\frac{i}{2}$.

10. Verifique as seguintes relações:

    a) $\mathrm{Re}\left[-i(2-3i)^2\right] = -12$; b) $\dfrac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = -i$;

    c) $\mathrm{Im}\left[\dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{-2+i}\right] = \dfrac{2(1+2\sqrt{3})}{5}$.

11. Demonstre que

$$|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 \,,$$

    quaisquer que sejam os números complexos α e β. Faça um gráfico e obtenha a seguinte interpretação geométrica: a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

12. Dados três vértices de um paralelogramo pelos números complexos z_1, z_2, z_3, determine o vértice z_4 oposto a z_2. Faça um gráfico.

13. Determine o argumento dos números complexos seguintes, escreva-os na forma polar e represente-os geometricamente:

    a) $z_1 = -2+2i$ b) $z_2 = 1+i\sqrt{3}$ c) $z_3 = -\sqrt{3}+i$

    d) $z_4 = \left(\frac{i}{1+i}\right)^5$ e) $z_5 = \dfrac{1}{-1-i\sqrt{3}}$ f) $z_6 = -1-i$

    g) $z_7 = \dfrac{-3+3i}{1+i\sqrt{3}}$ h) $z_8 = \dfrac{-4}{\sqrt{3}-i}$

14. A partir das representações polares dos números z_1, z_2, z_3 e z_6 do exercício anterior, obtenha representações polares de $z_2\,z_3$, z_2/z_3, $z_1\,z_3$, z_1/z_3, $z_2\,z_6$ e z_2/z_6. Represente-os geometricamente.

15. Mostre que:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\,,$$

$$\sin 3\theta = -\sin^3\theta - 3\cos^2\theta\sin\theta\,.$$

    Sugestão: Desenvolva $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ pela Fórmula do Binómio de Newton e pela Fórmula de De Moivre.

16. Obtenha fórmulas análogas às do exercício anterior para $\cos 4\theta$ e $\sin 4\theta$.

17. Verifique as relações:

    a) $\left|\dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-3i)}{\sqrt{5}}\right| = 2\sqrt{2}$; b) $\left|\dfrac{2+i}{2-i\sqrt{3}}\right| = \sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

18. Determine o valor absoluto de:
   a) $(i(2+3i)(5-2i))/(-2-2i)$;   b) $(2-3i)^2/(8+6i)^2$.

19. Demonstre a igualdade
$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|.$$

20. Mostre com um exemplo simples que para $z \in \mathbb{C}$ se tem em geral que $|z|^2 \neq z^2$.

21. Determine o valor de
   a) $\sum_{n=0}^{11} i^n$;   b) $\left|\frac{1}{1+3i} - \frac{1}{1-3i}\right|$.

22. Seja $z = \dfrac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$ (onde θ é real). Mostre que $\operatorname{Re} z = 0$ e $\operatorname{Im} z = \tan(\theta/2)$.

23. Prove que $|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$, onde $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$.

24. Prove que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2.

25. Calcule as raízes a seguir e represente-as geometricamente:
   a) $\sqrt{-4}$;   b) $(1+i\sqrt{3})^{1/2}$;   c) $\sqrt[3]{i}$;   d) $\sqrt[3]{-i}$;   e) $(-1+i\sqrt{3})^{1/4}$;   f) $\sqrt{-1-i\sqrt{3}}$.

26. Nos casos seguintes, resolva as equações $P(z) = 0$ e factorize o polinómio $P(z)$.
   a) $P(z) = z^6 - 64$;   b) $P(z) = z^4 + 9$;   c) $P(z) = 3z^2 - i$;   d) $P(z) = 5z^3 + 8$.

27. Mostre que as raízes de um polinómio com coeficientes reais ocorrem em pares de conjugados.

28. Determine todos os $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z - i| \leq |z - 2|$.

29. Resolva as seguintes equações:
   a) $z^2 - 2z + 2 = 0$;   b) $2z^2 + z + 1 = 0$;   c) $z^3 - 4 = 0$;   d) $z^4 + i = 0$;   e) $z^6 + 8 = 0$;
   f) $z^2 + (1-2i)z + (1+5i) = 0$;   g) $z^5 - 2 = 0$;   h) $z^4 + (1-i)z^2 + 2(1-i) = 0$.

30. Determine o complexo conjugado de
   a) $(3+8i)^4/(1+i)^{10}$ b) $(8-2i)^{10}/(4+6i)^5$.

31. Expresse na forma $a + bi$:
   a) e^{2+i};   b) e^{3-i}.

32. Reduza à forma $re^{i\theta}$ cada um dos números complexos abaixo e represente-os geometricamente:
   a) $1+i$ b) $-2(1-i)$ c) $\sqrt{3} - 3i$ d) $-1 - i/\sqrt{3}$ e) $-1 + i\sqrt{3}$ f) -3

33. Verifique as seguintes relações:

a) $\exp(3+7\pi i) = -e^3$ b) $\exp\dfrac{3-2\pi i}{6} = \dfrac{\sqrt{e}(1-i\sqrt{3})}{2}$.

34. Estabeleça as fórmulas de Euler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \ , \ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \ .$$

35. Sendo $z = re^{i\theta}$, prove que $|e^{iz}| = e^{-r\sin\theta}$.

36. Prove que $r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2} = r_3e^{i\theta_3}$, onde $r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$ e $\tan\theta_3 = \dfrac{r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2}$. Faça um gráfico.

37. Represente graficamente os seguintes conjuntos:

a) $\operatorname{Re} z < -3$; b) $\operatorname{Im} z \geq 1$; c) $|z-2i| > 2$;

d) $|z+1| \leq 2$; e) $|z-1+i| < 3$; f) $z \neq 0,\ 0 \leq \arg z < \pi/3$;

g) $|z| > 2,\ -\pi < \arg z < \pi$; h) $1 < |z+1-2i| < 2$; i) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{4}$;

j) $|3z-2i| \leq 5$; k) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; l) $\operatorname{Re} z^2 > 0$;

m) $z \neq 0,\ |\arg z^3| < \frac{2\pi}{3}$; n) $\operatorname{Im} z^3 > 0$.

38. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma recta. Faça gráficos.

a) $|z-2| = |z-3i|$; b) $|z+5| = |z-1-i|$; c) $|z-1+i| = |3+i-z|$;

d) $|z+3-i| = |z-4i|$; e) $|z-1+i| = |1-i\sqrt{3}+z|$; f) $|(z-i)(1-i\sqrt{3})| = |2z|$.

39. Identifique os conjuntos de pontos z nos casos a seguir. Faça gráficos.

a) $|z-i| + |z+2| = 3$; b) $|z-2+i| + |z| \leq 4$;

c) $|z-2| = 2|z+2i|$; d) $\operatorname{Re}(1-z) = |z|$.

40. Quais dos seguintes conjuntos de números complexos são (i) abertos, (ii) fechados, (iii) conexos, (iv) simplesmente conexos, (v) limitados, (vi) compactos? Justifique sucintamente as suas respostas.

a) $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$; b) $\{z : |z-\alpha| \geq 4\}$; c) $\{1, i, -1, -i\}$;

d) $\{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z-2i| < 1\}$; e) $\{z : 1 \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 4\}$ f) $\mathbb{C}$.

41. Prove que $S \subseteq \mathbb{C}$ é fechado se e só se $\mathbb{C} - S$ é aberto.