



Instituto Superior Politécnico de Viseu
Escola Superior de Tecnologia de Viseu
Curso de Engenharia de Sistemas e Informática

Processamento Digital de Sinal

Aula 9

4.º Ano – 2.º Semestre

Manuel A. E. Baptista, Eng.º

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Departamento de Informática

1

www.estv.ipv.pt

Programa:

1. Introdução ao Processamento Digital de Sinal
2. Representação e Análise de Sinais
3. Estruturas e Projecto de Filtros FIR e IIR
4. Processamento de Imagem
5. Processadores Digitais de Sinal

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Departamento de Informática

2

www.estv.ipv.pt

Bibliografia:

Processamento Digital de Sinal:

- Sanjit K. Mitra, “**Digital Signal Processing – A computer based approach**”, McGraw Hill, 1998
Cota: 621.391 MIT DIG
- Roman Kuc, “**Introduction to Digital Signal Processing**”, McGraw Hill, 1988.
Cota: 621.391 KUC INT
- Johnny R. Johnson, “**Introduction to Digital Signal Processing**”, Prentice-Hall, 1989.
Cota: 621.391 JOH INT
- G. Proakis, G. Manolakis, “**Digital Signal Processing – Principles, Algorithms Applications**”, 3ª Ed, P-Hall, 1996.
Cota: 621.391 PRO DIG
- James V. Candy, “**Signal Processing – The modern Approach**”, McGraw-Hill, 1988
Cota: 621.391 CAN SIG
- Mark J. T., Russel M., “**Introduction to DSP – A computer Laboratory Textbook**”, John Wiley & Sons, 1992.
Cota: 621.391 SMI INT
- James H. McClellan e outros, “**Computer-Based Exercises - Signal Proc. Using Matlab 5**”, Prentice-Hall, 1998.
Cota: 621.391 MCC COM

Processamento Digital de Imagem:

- Rafael C. Gonzalez & Richard E. Woods, “**Digital Image Processing**”, Prentice Hall, 2ª Ed., 2002.
Cota: 681.5 GON DIG.
- I. Pittas H. McClellan e outros, “**Digital Image Processing Algorithms and Applications**”, John Wiley & Sons, 2000.
Cota: 621.391 PIT.
- William K. Pratt, “**Digital image processing**”, John Wiley, 2ª Ed, 1991.
Cota: 681.5 PRA DIG
- Bernd Jähne, “**Digital image processing : concepts, algorithms, and scientific applications**”, Springer, 1997.
Cota: 681.5 JAH

Avaliação:

A avaliação é composta pela componente teórica e componente prática ponderadas da seguinte forma:

$$\text{Classificação Final} = 80\% * \text{Frequência ou Exame} + 20\% * \text{Prática}$$

O acesso ao exame não está condicionado embora não tenha função de melhoria, ou seja, se o aluno entregar a prova de exame, será essa a classificação a utilizar no cálculo da média final independentemente da nota da prova de frequência obtida.

A avaliação prática é constituída por trabalhos laboratoriais a executar em MATLAB.

Representação e Análise de Sinais

• Amostragem de Sinais Contínuos no Tempo - Sumário

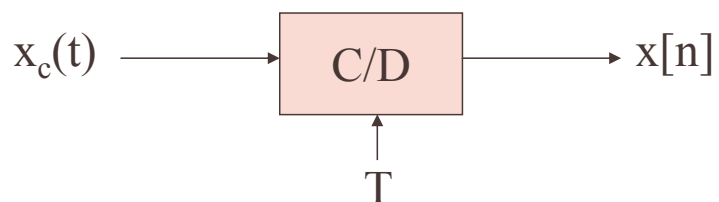
- Amostragem periódica
- Representação da Amostragem no Domínio Frequência
- Reconstrução de sinais limitados em frequência
- Processamento Discreto de Sinais Contínuos
- Mudança da taxa de amostragem usando Processamento Discreto
- Processamento Multitaxa
- Processamento Digital de Sinais Analógicos

 Manuel A. E. Baptista
 Ernesto R. Afonso


Amostragem de Sinais Contínuos – Amostragem Periódica

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

Conversor
Contínuo/Discreto



T: Período de amostragem [s]

$$f_s = \frac{1}{T} \quad \text{Frequência de amostragem [Hz]}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Frequência de amostragem [rad/s]}$$

 Manuel A. E. Baptista
 Ernesto R. Afonso


Amostragem de Sinais Contínuos – Amostragem Periódica

A implementação de um conversor C/D é um conversor A/D Ideal.

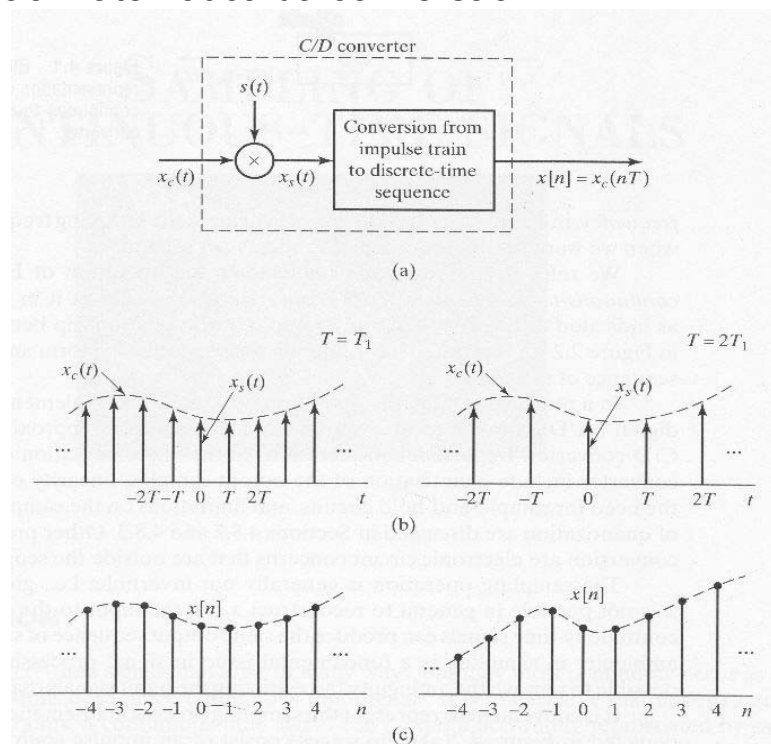
- Precisão infinita – Número Infinito de bits
- Quantização em passos lineares
- Sem efeitos secundários devido ao circuito de *sample&hold*
- Sem limitações quanto à taxa de amostragem

A operação de **amostragem ideal** é irreversível:

Pois, vários sinais contínuos podem dar origem a um mesmo sinal amostrado.

Amostragem de Sinais Contínuos – Amostragem Periódica

Representação matemática da conversão A/D:



$x[n]$ Sinal Discreto $x_s(t)$ sinal contínuo

Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Trem de impulsos:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Sinal amostrado através dum trem de impulsos

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t)$$

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



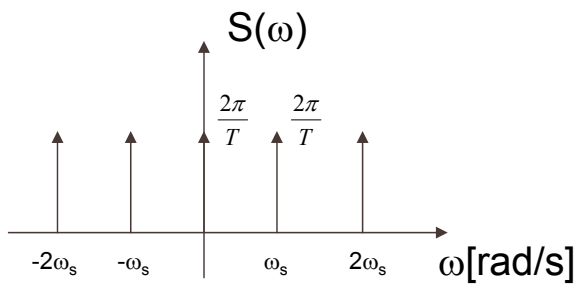
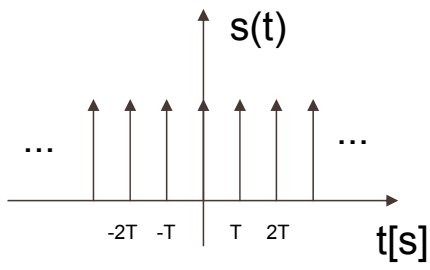
Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Propriedades da Transformada de Fourier contínua

Transformada dum trem de impulsos é também um trem de impulsos:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{F} S(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Onde: $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Teorema da convolução: $x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$

assim: $x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t)$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\omega) * \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right]$$

Logo:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s)$$

Onde: $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Sinal $x_c(t)$ limitado na frequência

Nota-se que se:

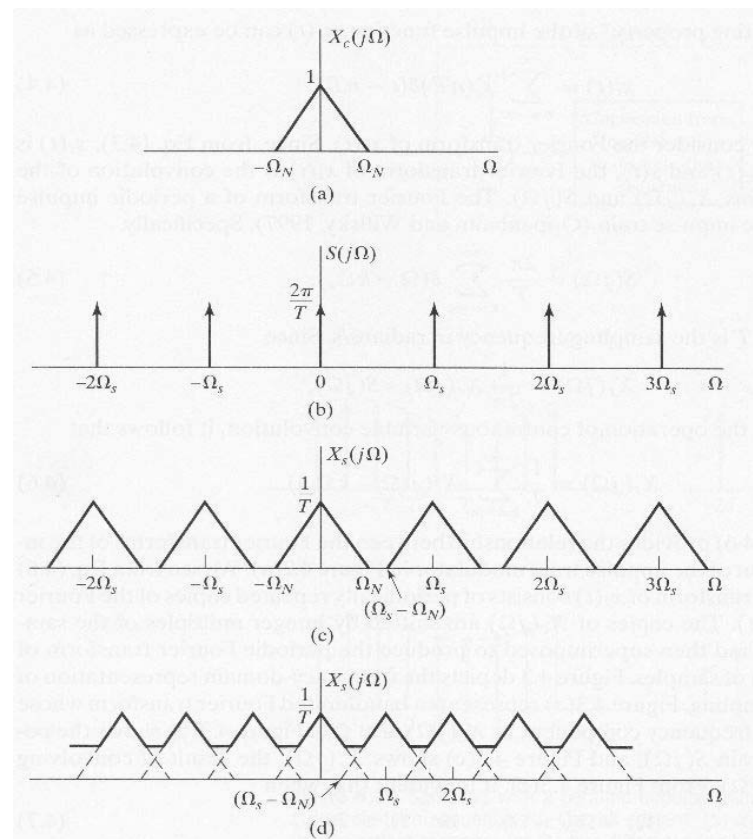
$$\omega_s - \omega_N > \omega_N$$

$$\omega_s > 2\omega_N$$

Não haverá sobreposição de espectros.

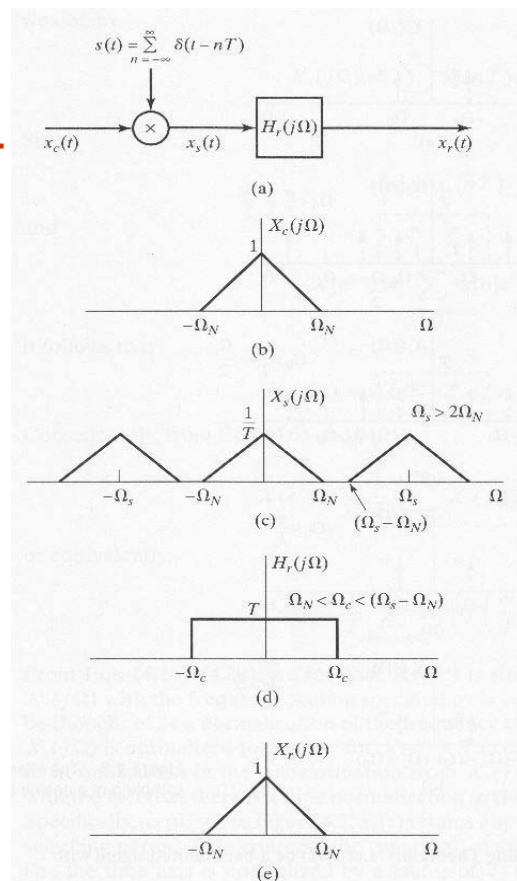
Caso: $\omega_s < 2\omega_N$

Distorção devido à sobreposição de espectros -> Efeito de **Aliasing**.



Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

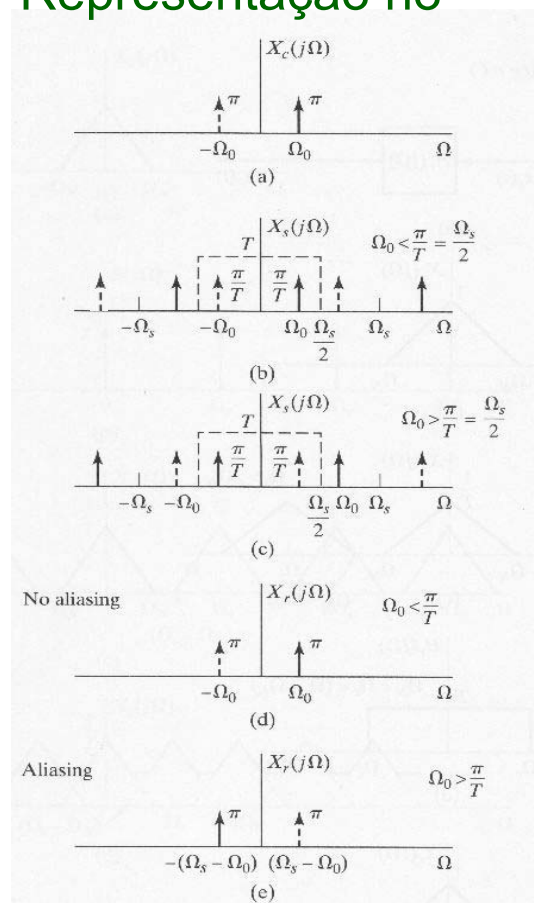
Reconstrução perfeita, usando um filtro **passa-baixo ideal**



13

Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Amostragem dum sinal sinusoidal **co-seno**



14

Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Teorema de Nyquist(1928), Teorema de Shannon(1949) ou **Teorema da Amostragem**

“ Para um sinal $x_c(t)$ limitado em frequência tal que $X_c(\omega)=0$ para $|\omega|>\omega_N$, este é determinado unicamente através das suas amostras $x_c(nT)$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ se:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_N \quad ”$$

Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Relação entre $X(\Omega)$ e $X_s(\omega)$.

Sabendo que,
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

e aplicando a Transformada de Fourier, obtemos

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \cdot e^{-j\omega \cdot nT}$$

Dado que,
$$x[n] = x_c(nT)$$

e sabendo que a DTFT é
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega \cdot n}$$

obtemos:
$$X_s(\omega) = X(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T}$$

Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Nas aulas anteriores vimos,

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

pelo que

$$X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

Pode-se interpretar como uma normalização na frequência onde $\omega = \omega_s$ é normalizada em $\Omega = 2\pi$

Este efeito está relacionado directamente, com a normalização no domínio do tempo, onde o período T é normalizado para 1 amostra.

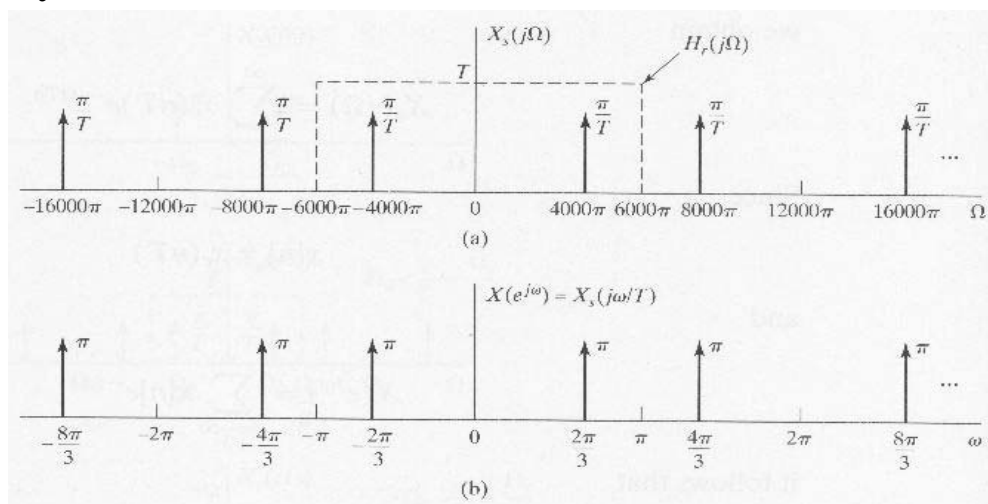
Amostragem de Sinais Contínuos – Representação no Domínio da Frequência

Exemplo:

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

Amostrado a $f_s = 6\text{kHz}$.

$$T = 1/6000 \quad \omega_s = 12000\pi$$



A frequência analógica $\omega_0 = 4000\pi$ rad/s ou $f_0 = 2\text{kHz}$ amostrada a $f_s = 6\text{kHz}$, é equivalente à frequência digital:

$$\Omega_0 = \omega_0 T = 4000\pi \cdot \frac{1}{6000} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad / amostra}$$

Amostragem de Sinais Contínuos – Reconstrução de sinais limitados em frequência

A partir de $x[n]$ podemos obter $x_s(t)$, um sinal constituído por um trem de impulsos contínuo modelado pela amplitude de $x[n]$,

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT)$$

Se aplicarmos este sinal à entrada de um filtro Passa-Baixo contínuo e ideal $H_r(\omega)$, com resposta impulsional $h_r(t)$, teremos então :

$$x_r(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_r(t) * \delta(t - nT)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_r(t - nT)$$

Amostragem de Sinais Contínuos – Reconstrução de sinais limitados em frequência

Filtro de Reconstrução $H_r(\omega)$:

- **Largura de Banda** ω_c entre ω_N e $(\omega_s - \omega_N)$
- **Ganho** T

Se o sinal foi amostrado sem *aliasing*, para qualquer sinal de entrada basta:

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

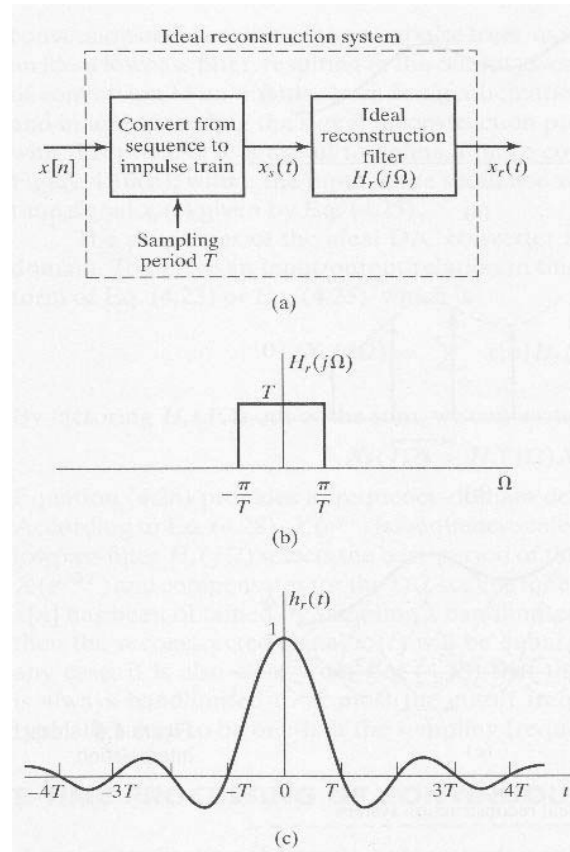
A resposta impulsional $h_r(t)$ será:

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T}$$

Note-se que: $h_r(0) = 1$

$$h_r(nT) = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Amostragem de Sinais Contínuos – Reconstrução de sinais limitados em frequência



21

Amostragem de Sinais Contínuos – Reconstrução de sinais limitados em frequência

Podemos calcular:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_r(t - nT)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

Assim: se $x[n] = x_c(nT)$ e $x_r(mT) = x_c(mT)$ então um número inteiro m de pontos de amostragem é perfeitamente reconstruído.

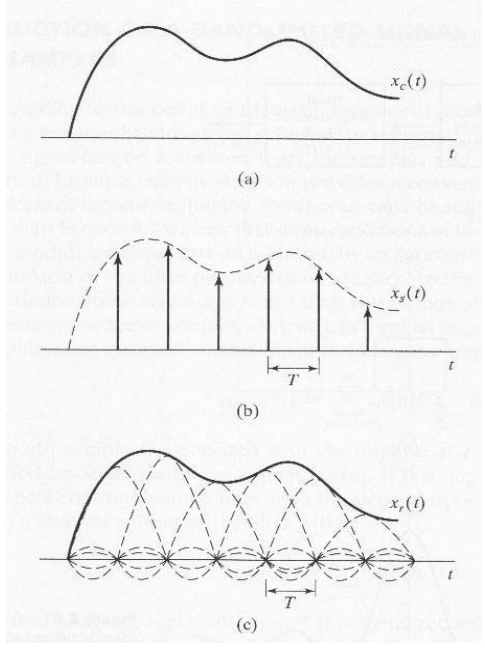
22

Amostragem de Sinais Contínuos – Reconstrução de sinais limitados em frequência

Se observarmos o gráfico de:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

Vemos que o filtro passa-baixo ideal, interpola os impulsos do sinal $x_s(t)$ de forma a obter-se o sinal contínuo $x_r(t)$.



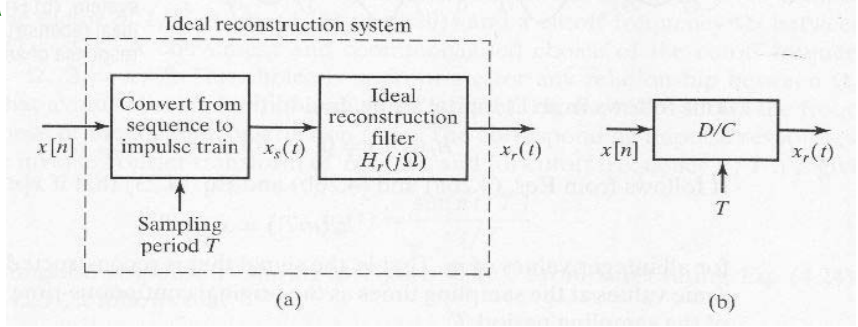
Como vimos, $x_r(mT) = x_c(mT)$, **se não houver aliasing**: $x_r(t) = x_c(t)$, como se pode ver a partir da análise espectral.

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Amostragem de Sinais Contínuos – Reconstrução de sinais limitados em frequência

Um conversor Discreto/Contínuo ideal pode ser esquematizado da seguinte forma:



A partir de
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_r(t - nT)$$

obtém-se:
$$X_r(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot H_r(\omega) \cdot e^{-j\omega nT}$$

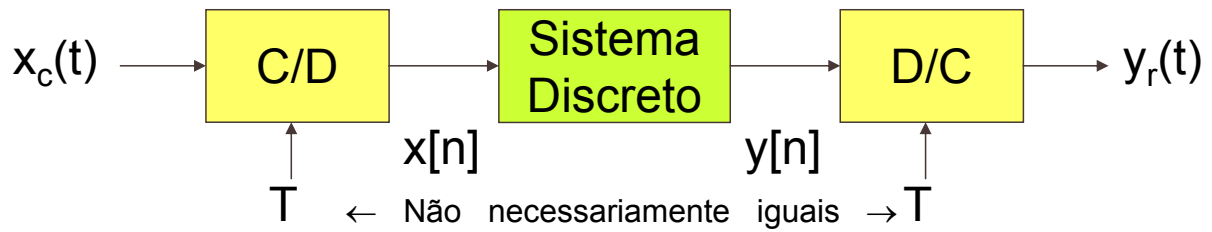
$$X_r(\omega) = H_r(\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega T n}$$

Logo:
$$X_r(\omega) = H_r(\omega) \cdot X(\Omega) \Big|_{\Omega = \omega T}$$

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Amostragem de Sinais Contínuos – Processamento de Sinais Contínuos



Sinal $x_c(t)$ limitado em frequência

$$x[n] = x_c(nT) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad \xleftrightarrow{F}$$

$$Y_r(\omega) = H_r(\omega) \cdot Y(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T} = \begin{cases} T \cdot Y(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T}, & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{outros} \end{cases}$$

Amostragem de Sinais Contínuos – Processamento de Sinais Contínuos

Sistemas Discretos LTI

Temos a resposta em frequência efectiva do sistema total dado por:

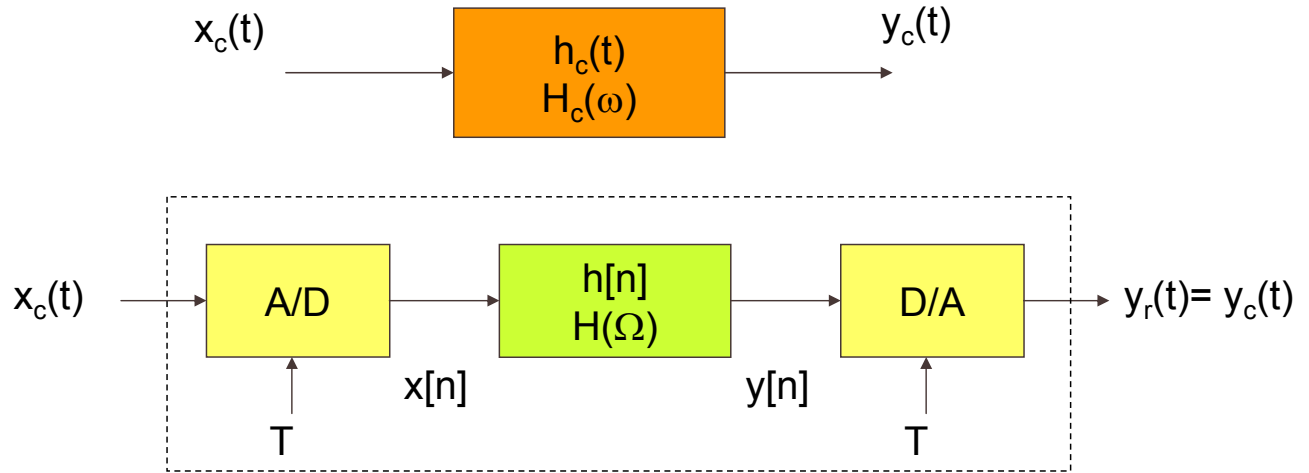
$$H_{eff}(\omega) = \begin{cases} H(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T}, & |\omega| < \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Condições:

- Sistema discreto LTI
- Sinal de entrada limitado em frequência
- Obedecendo ao Teorema da Amostragem

Amostragem de Sinais Contínuos – Processamento de Sinais Contínuos

Invariância ao Impulso



Sistema invariante ao impulso:

$$h[n] = T \cdot h_c(nT)$$

$$H(\Omega) = H_c\left(\frac{\Omega}{T}\right) \Big|_{\Omega=\omega T}, \quad |\Omega| \leq \pi$$

Amostragem de Sinais Contínuos – Mudança da taxa de amostragem usando Processamento Discreto

Tendo: $x[n] = x_c(nT)$

CD/MD: 44.1kHz

DAT: 48kHz

Muitas vezes precisamos:

Broadcast: 32kHz

$$x'[n] = x_c(nT')$$

Modos:

- reconstruir $x_c(t)$ e re-amostrar a T' segundos

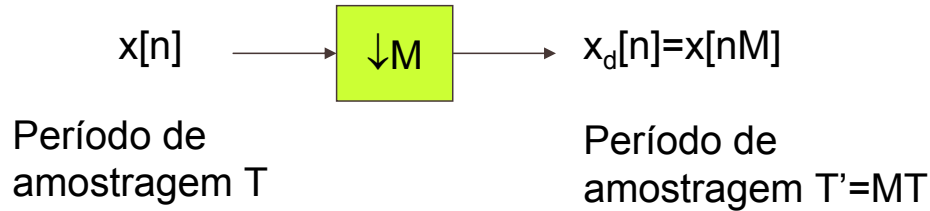
Problemas: A/D, D/A, filtros

- Processar $x[n]$ directamente

Amostragem de Sinais Contínuos – Redução da taxa de amostragem por um factor inteiro

Compressor da taxa de amostragem

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT)$$



A redução da taxa de amostragem: *downsampling*

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Amostragem de Sinais Contínuos – Redução da taxa de amostragem por um factor inteiro

Análise do espectro

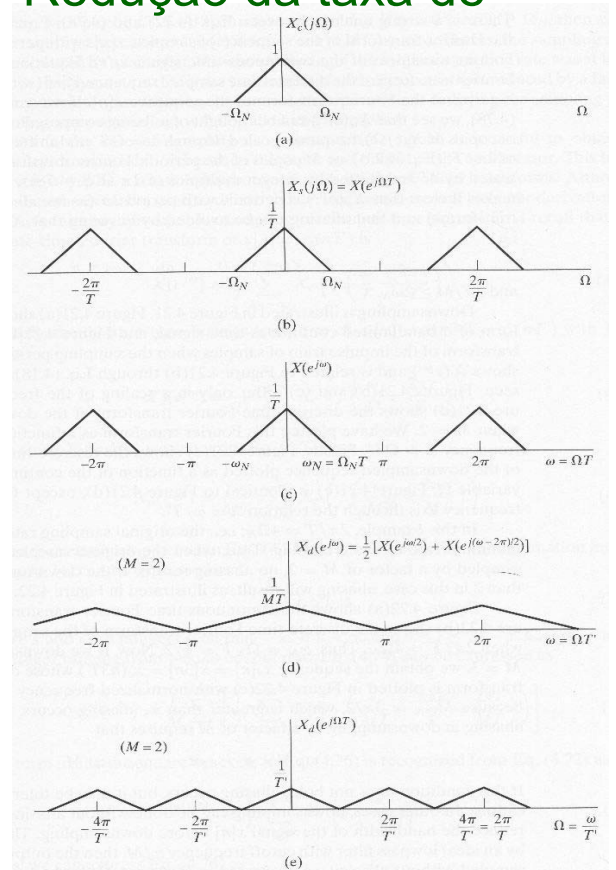


Figure 4.21 Frequency-domain illustration of downsampling.

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Amostragem de Sinais Contínuos – Redução da taxa de amostragem por um factor inteiro

Análise do espectro

com *aliasing* e filtro

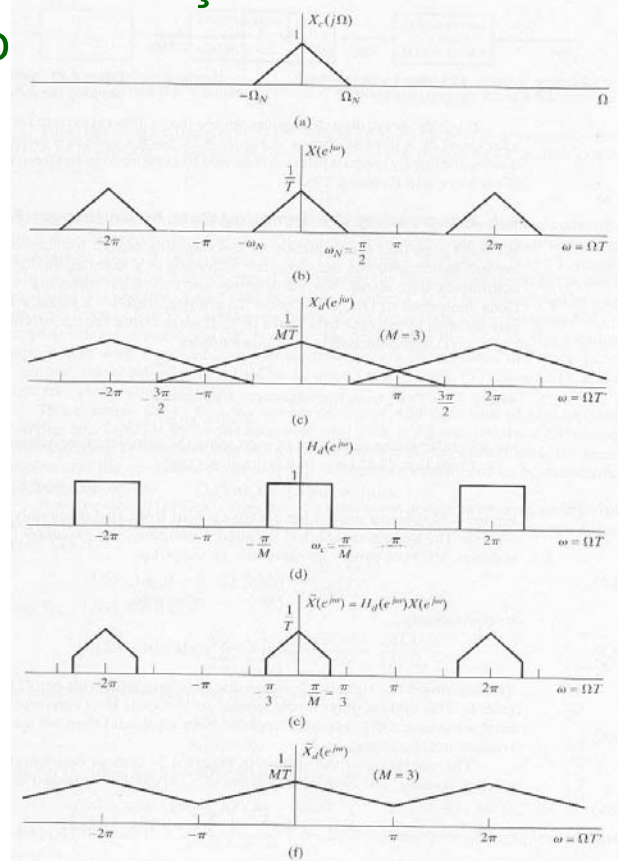


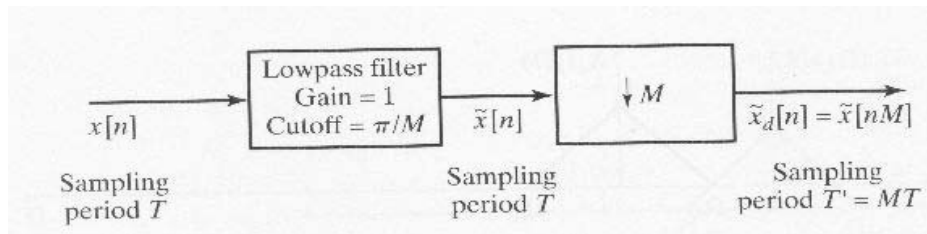
Figure 4.22 (a)–(c) Downsampling with aliasing. (d)–(f) Downsampling with prefiltering to avoid aliasing.

31

Amostragem de Sinais Contínuos – Redução da taxa de amostragem por um factor inteiro

Decimador: sistema que reduz a taxa de amostragem dum factor M

Decimação: Processo de filtragem Passa Baixo, com frequência de corte π/M , seguida de um compressor



O espectro expande-se dum factor M.

32

Amostragem de Sinais Contínuos – Aumento da taxa de amostragem por um factor inteiro

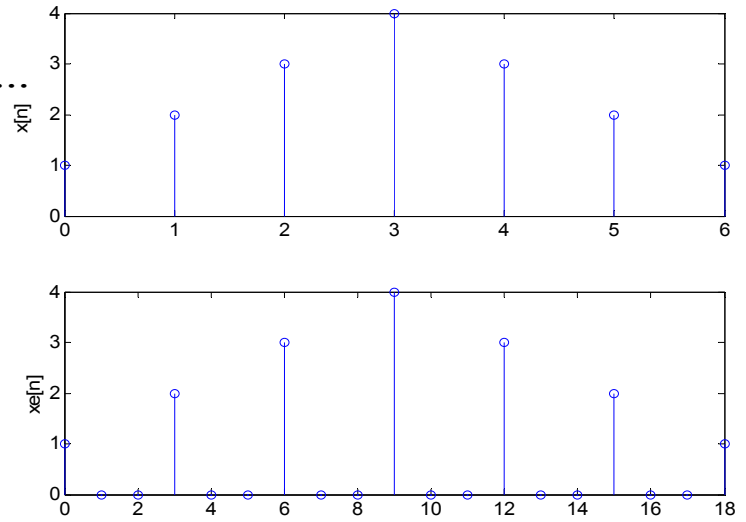
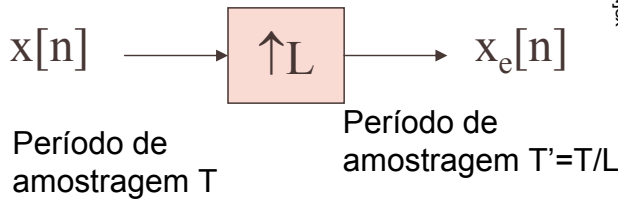
Expansor :

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L) \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots$$

Aumento da taxa de amostragem: *upsampling*

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$$

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - kL]$$



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Amostragem de Sinais Contínuos – Aumento da taxa de amostragem por um factor inteiro

Análise do espectro

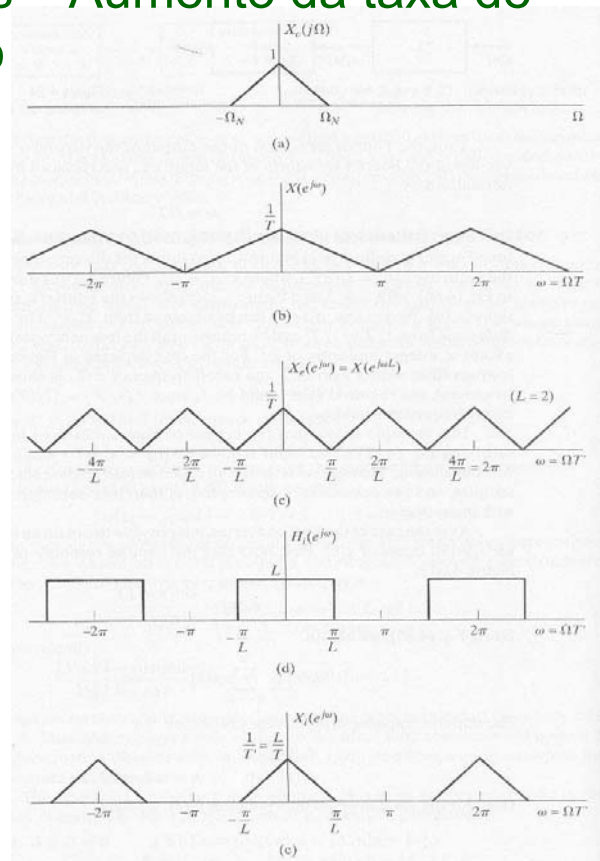


Figure 4.25 Frequency-domain illustration of interpolation.

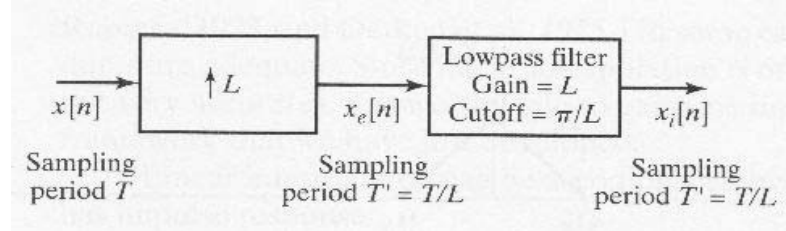
Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Amostragem de Sinais Contínuos – Aumento da taxa de amostragem por um factor inteiro

Interpolador: sistema que aumenta a taxa de amostragem dum factor L

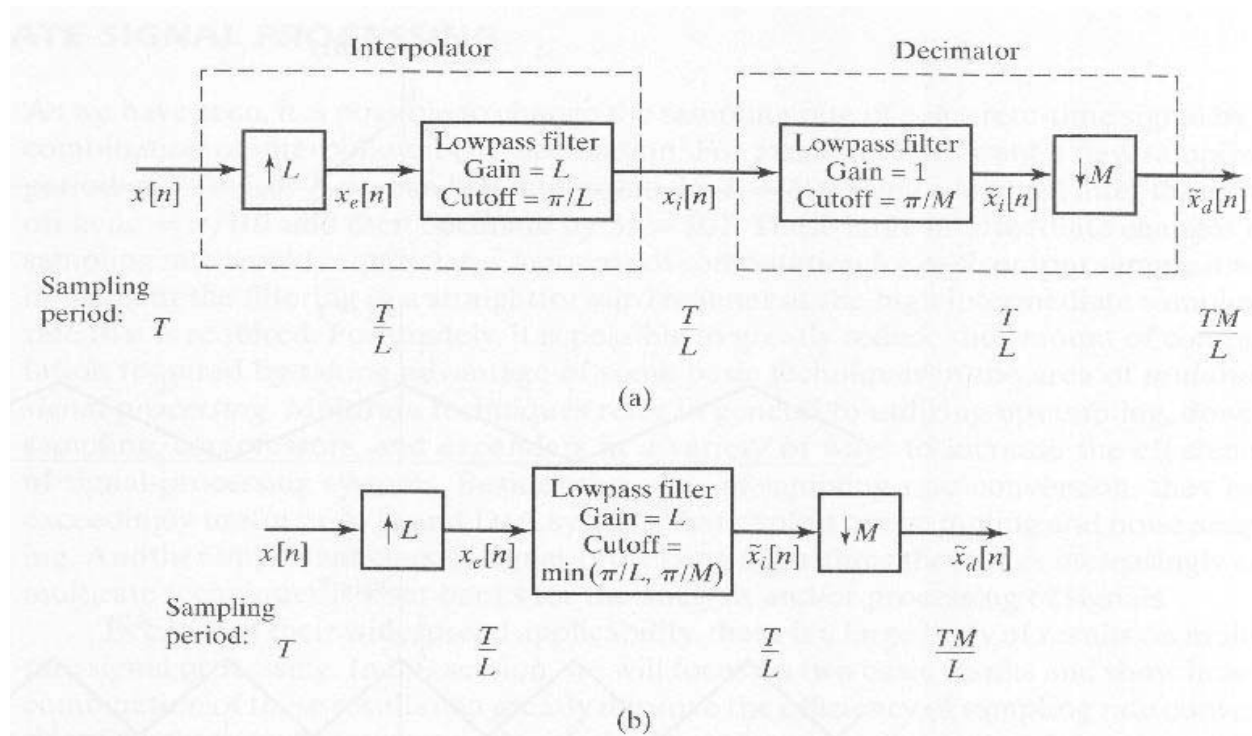
Interpolação: Processo de expansão, seguido de filtragem Passa-Baixo com frequência corte π/L



O espectro replica-se nas frequências $2\pi/L$.

Efectuando a filtragem Passa-Baixo, apenas o espectro centrado em $2\pi k$ é equivalente a interpolar as amostras em falta.

Amostragem de Sinais Contínuos – Mudando a taxa de amostragem por um factor não inteiro.



Processamento Multi taxa.

Quem tiver interesse neste assunto, poderá efectuar alguma investigação (sugestão: pesquisa na Internet) e tentar entender, e se necessário solicitar o apoio do docente.

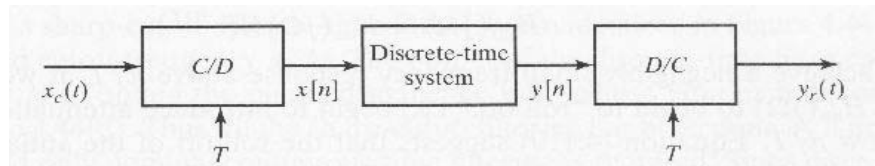
Aplicação: Codificação em Sub-bandas (MP3) análise por banco de filtros, etc.

Base para transformada *wavelet*.

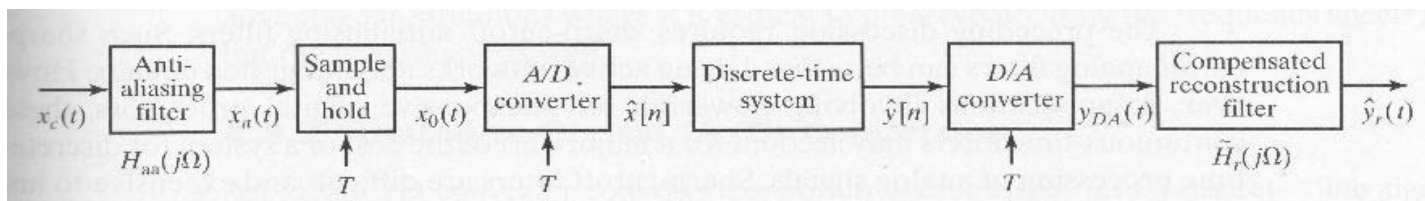
Processamento Digital de Sinais Analógicos – Sistema Real

Até agora, analisámos sistemas ideais:

- Sinais limitados em frequência
- Conversores C/D, D/C
- Filtros Passa Baixo ideais



Sistema Real



Processamento Digital de Sinais Analógicos – Filtro Anti-Aliasing

Normalmente, procura-se usar uma taxa de amostragem cujo valor seja o menor possível, de forma a minimizar os requisitos para do processador digital.

Este facto, implica que o sinal de entrada seja limitado em frequência.

Exemplo 1: Voz inteligível, até 4kHz. Porém temos frequências 20kHz.

Exemplo 2: Sinal limitado + Ruído de alta frequência.

Para evitar o efeito de *aliasing* é necessário limitar a largura de banda do sinal de entrada.

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Filtro Anti-Aliasing

Filtro anti-aliasing ideal: Filtro Passa Baixo ideal de frequência $f_s/2$

Filtros analógicos reais

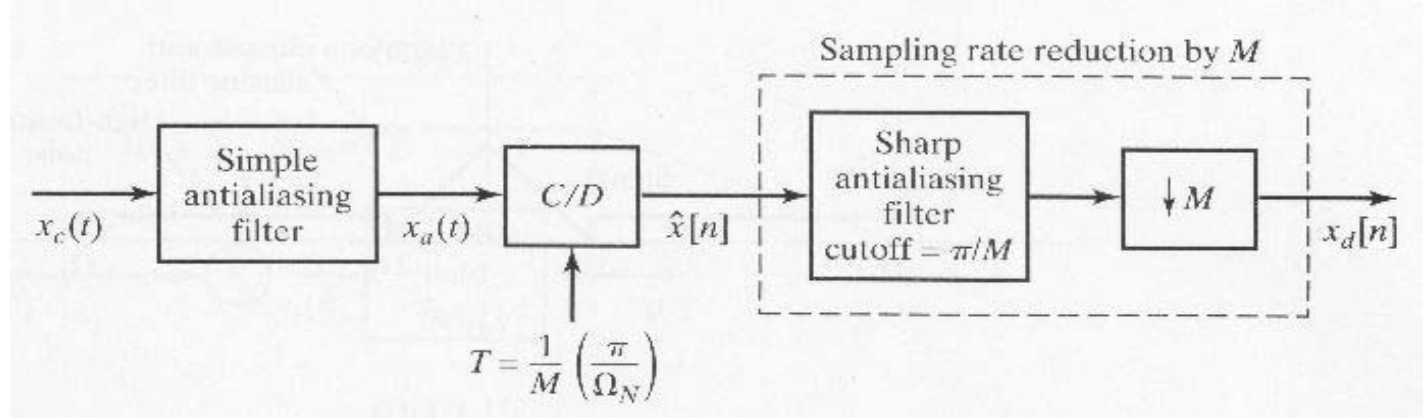
- O corte do filtro não corre de forma abrupta, pelo que precisam de começar a atenuar frequências menores que $f_s/2$.
- Os filtros em que o corte é mais abrupto, são mais complexos, necessitam dum maior número de componentes, e por isso são mais caros.
- Em geral, apresentam uma resposta em fase extremamente não-linear (e.g. Chebychev e Cauer), principalmente próximo na banda de passagem, junto da frequência de corte.

Soluções possíveis

- Utilização dum filtro activo simples, seguido de um filtro condensadores comutados de ordem elevada.
- Amostragem com *oversampling* seguida de filtragem digital

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Filtro Anti-Aliasing

Amostragem com oversampling seguida de filtragem digital



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



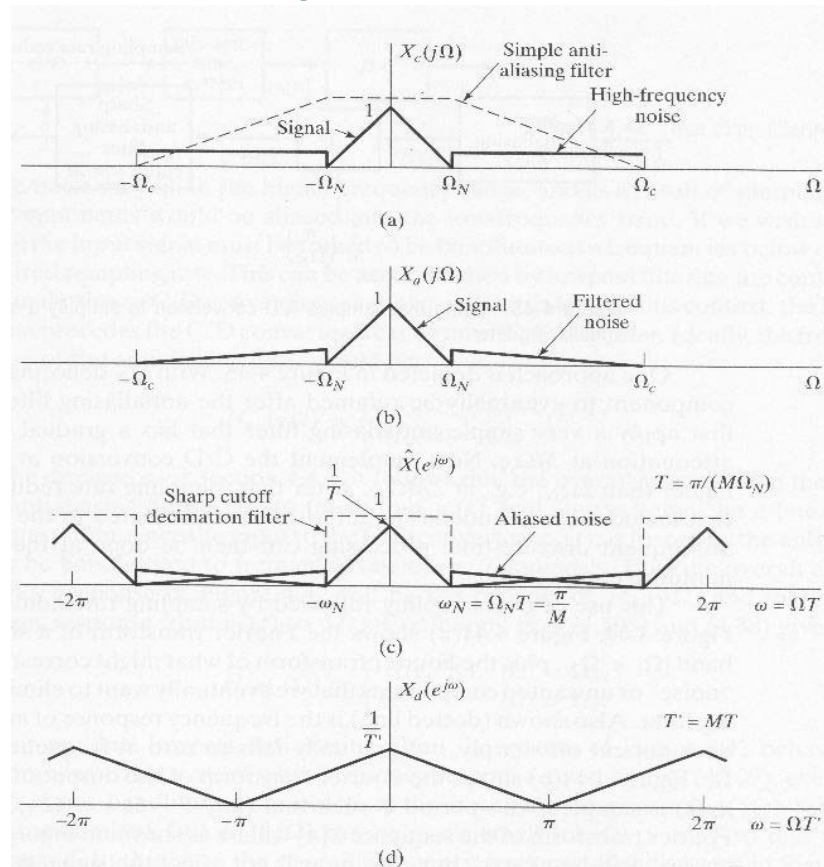
Processamento Digital de Sinais Analógicos – Filtro Anti-Aliasing

Sinal limitado + Ruído em alta frequência.

Filtro analógico simples

Amostragem em T/M
Filtragem digital

Decimação ↓M



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso

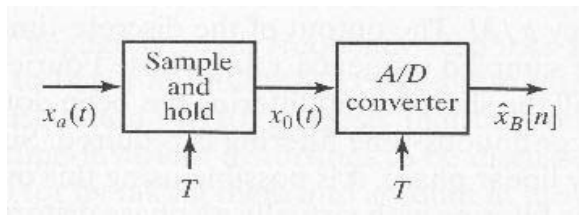
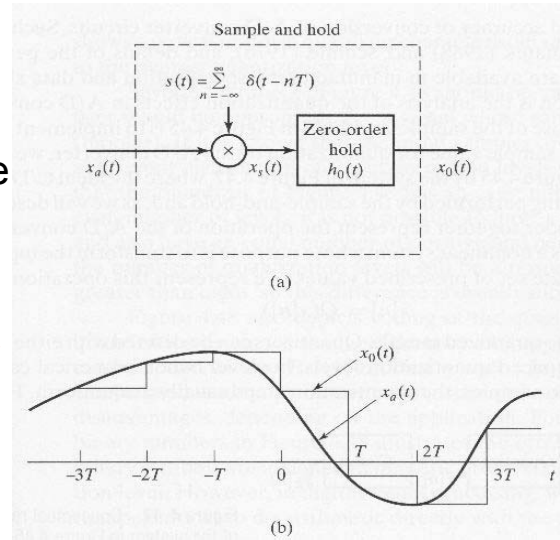


Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital

C/D: Precisão infinita

A/D: Dispositivo que converte tensão ou corrente eléctrica num código binário.

A conversão tem precisão finita e não é instantânea: Necessita **sample&hold**



Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital

Quantização

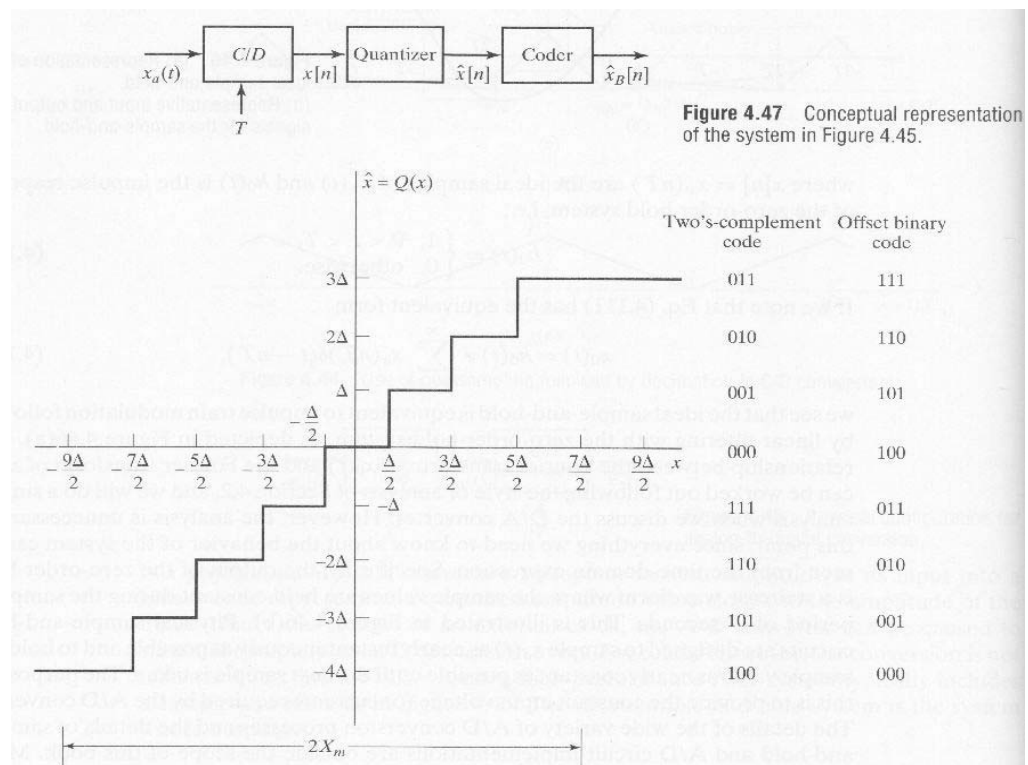
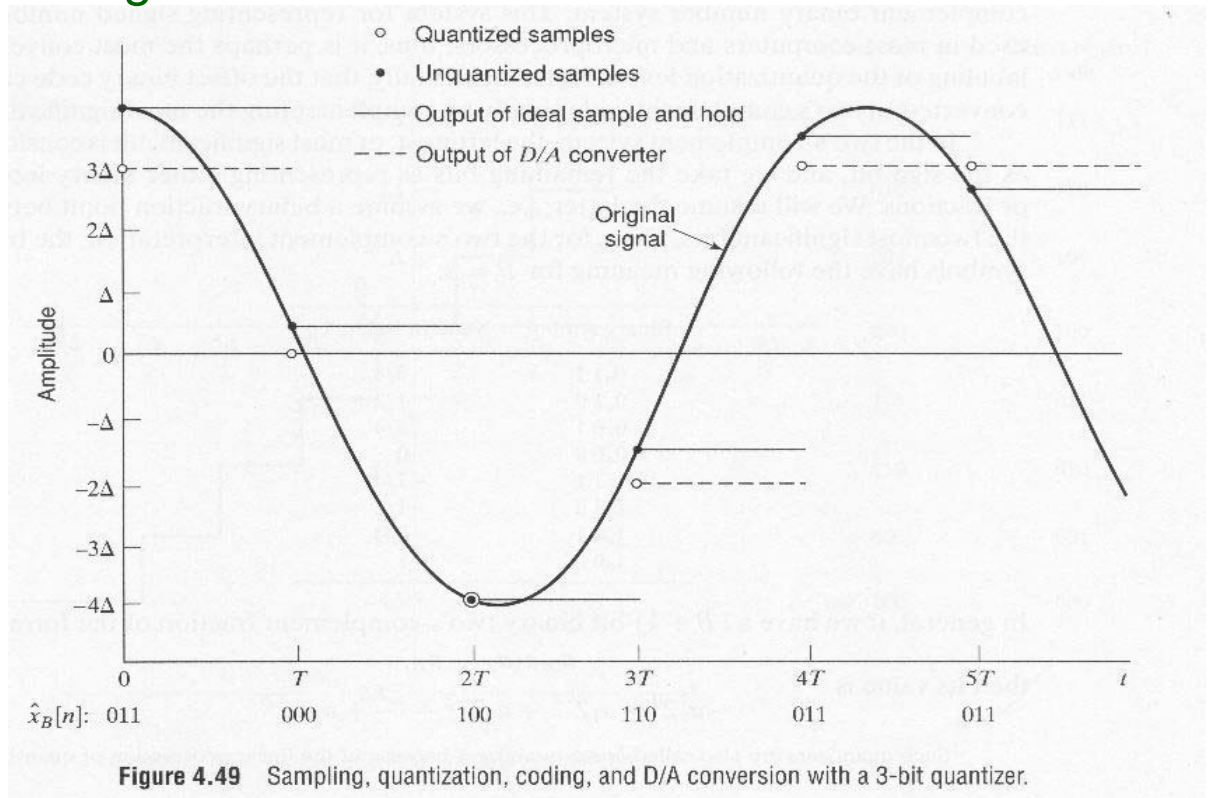


Figure 4.47 Conceptual representation of the system in Figure 4.45.

Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso



Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital



45

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital

Análise do Erro de Quantização

Intervalo de quantização: $\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$

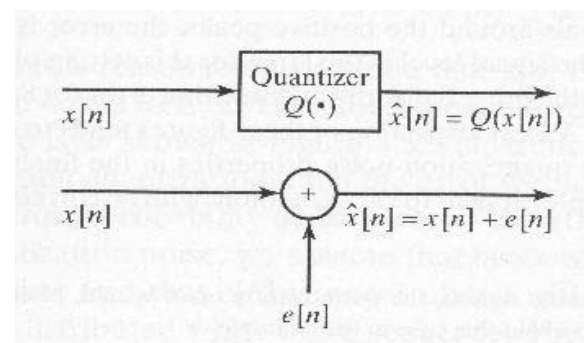
Gama Total de Escala: X_m

Número de Bits: $B+1$

Erro de quantização: $e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$

Segue que: $-\Delta/2 \leq e[n] \leq \Delta/2$

Erro de quantização, visto como ruído aditivo:



46

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital

Análise do Erro de Quantização

Para a construção do modelo estatístico do erro assume-se que:

- A sequência de erro $e[n]$ é uma amostragem de um processo aleatório estacionário (as características estatísticas não variam com o tempo);
- O erro $e[n]$ não está correlacionado com o sinal $x[n]$;
- As variáveis aleatórias do processo de erro não estão correlacionadas (o erro é um processo de ruído branco);
- A função distribuição de probabilidade de erro é uniforme sobre a gama do erro de quantização;

Em geral constituem boas aproximações para sinais $x[n]$ naturais (e.g. voz, música, vídeo, etc...), e pequenos intervalos de quantização.

 Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso


Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital

$$x[n] = 0.99 \cos(n/10)$$

3 bits ($B=2$)

$e[n]$ / p 3 bits

$e[n]$ / p 8 bits

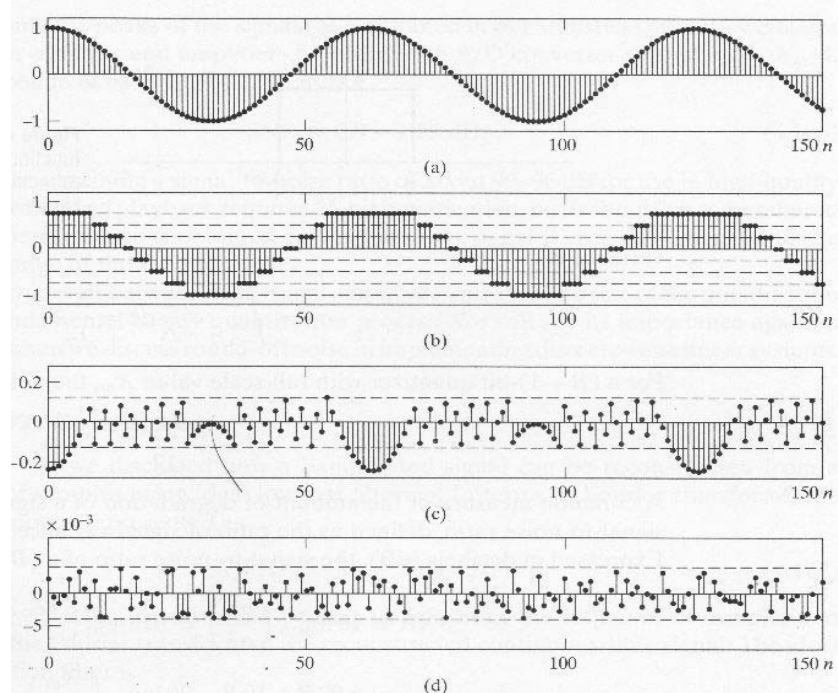


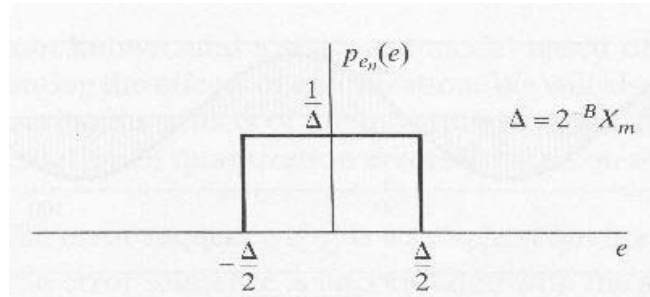
Figure 4.51 Example of quantization noise. (a) Unquantized samples of the signal $x[n] = 0.99 \cos(n/10)$. (b) Quantized samples of the cosine waveform in part (a) with a 3-bit quantizer. (c) Quantization error sequence for 3-bit quantization of the signal in (a). (d) Quantization error sequence for 8-bit quantization of the signal in (a).

 Manuel A. E. Baptista
Ernesto R. Afonso


Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital

Análise do Erro de Quantização

Para Δ pequeno podemos modelar a probabilidade do Sinal de erro, como:



Variância:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot de = \frac{\Delta^2}{12}$$

Para $B+1$ bits e gama total da escala X_m temos:

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}$$

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Analógico-Digital

Relação Sinal-Ruído

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \right)$$

$$SNR = 6.02B + 10.8 - 20 \log_{10} \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right)$$

Logo, a SNR aumenta 6.02 dB para cada bit

σ_x é o desvio padrão ou o valor RMS de $x[n]$

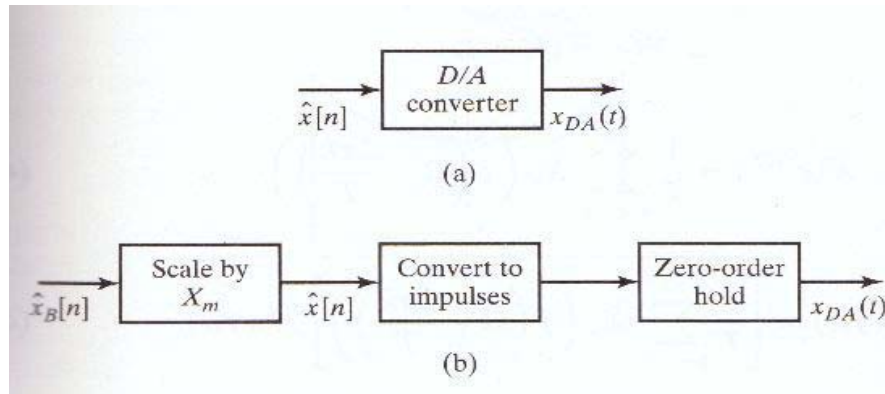
Assim esta equação não é válida se o sinal $x[n]$ saturar o quantizador, isto é $|x[n]| > X_m$.

Se a amplitude do sinal $x[n]$ tem uma distribuição gaussiana, apenas 0.0064% das amostras terão amplitudes $> 4 \sigma_x$.

Fazendo: $\sigma_x = X_m/4$ consegue-se $SNR \approx 6.02B - 1.25$.


Quantos bits são necessários p/ 90dB? Qualidade de CD.

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Digital - Analógico



$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \cdot \hat{x}_B[n] \cdot h_0(t - nT)$$

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \cdot h_0(t - nT)$$


 $x[n] + e[n]$

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Digital - Analógico

Logo:

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_0(t - nT)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \cdot h_0(t - nT)$$

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t)$$

Análise em frequência, fazendo a DTFT de $x_0(t)$:

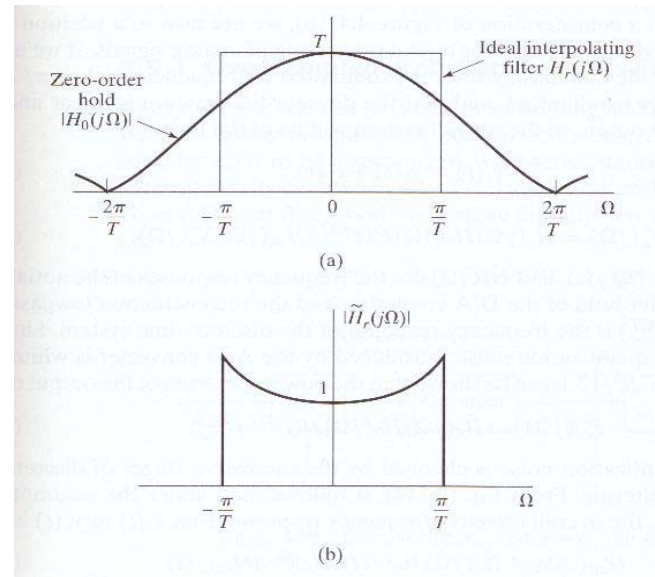
$$X_0(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot H_0(\omega) \cdot e^{-j\omega nT}$$

$$X_0(\omega) = X(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T} \cdot H_0(\omega)$$

Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Digital - Analógico

Onde:

$$H_0(\omega) = \frac{2 \cdot \sin(\omega T / 2)}{\omega} \cdot e^{-j\omega T / 2}$$



Para reconstruir o sinal precisamos de filtrar o sinal $X_0(\omega)$ com um **filtro PB ideal compensado**:



Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Digital - Analógico

Voltando a analisar um sistema onde, as saídas dos filtros de *antialiasing* e de reconstrução são limitadas em $f_s/2$

O sistema é LTI, então podemos escrever que a saída será: $\hat{y}_r = y_a(t) + e_a(t)$

$$\text{Onde: } Y_a(\omega) = \tilde{H}_r(\omega) \cdot H_0(\omega) \cdot H(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T} \cdot H_{aa}(\omega) \cdot X_c(\omega)$$

Considerando que o ruído de quantização gerado pelo A/D é um ruído branco de variância $\sigma_e^2 = \Delta^2 / 12$ demonstra-se:

$$P_{e_a}(\omega) = \left| \tilde{H}_r(\omega) \cdot H_0(\omega) \cdot H(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T} \right|^2 \cdot \sigma_e^2$$

Espectro de potência do Ruído.



Processamento Digital de Sinais Analógicos – Conversão Digital - Analógico

Assim, a resposta em frequência efectiva do sistema é:

$$H_{eff}(\omega) = \tilde{H}_r(\omega) \cdot H_0(\omega) \cdot H(\Omega) \Big|_{\Omega=\omega T} \cdot H_{aa}(\omega)$$

Obs. 1: As compensações podem ser embutidas no processamento digital do sinal, $H(\Omega)$.

Obs. 2: O sistema $H(\Omega)$ pode inserir também ruído de quantização; Ruído interno ao sistema digital.