MAC

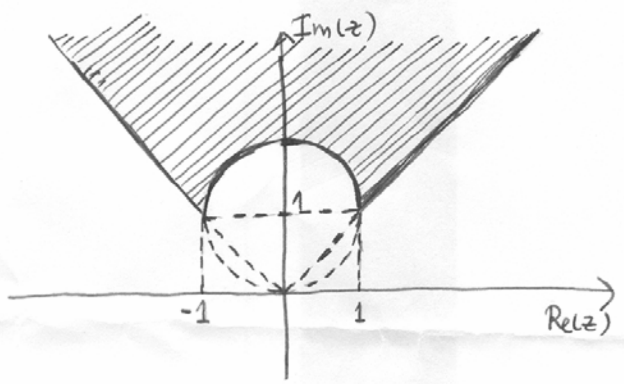
Resolução do Exame de

Janeiro de 2006

1. $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$

Assim, $\left|z - \frac{1+i}{1-i}\right| \geq 1$ é equivalente a $|z-i| \geq 1$.

Representação geométrica do conjunto dado no plano complexo:



O conjunto não é aberto: por exemplo, $1+i$ pertence ao conjunto mas não existe nenhum $\varepsilon > 0$ tal que $B(1+i, \varepsilon)$ esteja contida nele.

O conjunto é fechado, visto o seu complementar ser aberto.

O conjunto não é limitado, porque qualquer que seja o $L \in \mathbb{R}^+$, existe sempre algum ponto z do conjunto tal que $|z| > L$.

Também não é compacto pois, para o ser, teria de ser fechado e limitado.

É conexo porque entre quaisquer dois pontos do conjunto existe sempre um caminho que os une totalmente contido no conjunto.

É simplesmente conexo porque qualquer curva fechada contida no conjunto pode ser "deformada continuamente" dentro do conjunto de forma a obter um ponto.

2. Uma função de forma $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, onde u e v têm derivadas parciais contínuas é analítica sse satisfizer as equações de Cauchy-Riemann $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$.

$$v(x,y) = \operatorname{Im}(f(z)) = x - 5xy \Rightarrow v_y = -5x$$

$$u_x = v_y = -5x \Rightarrow u(x,y) = \int -5x\,dx = -\frac{5}{2}x^2 + K(y),$$

onde $K(y)$ é uma função de y.

$$u(x,y) = -\frac{5}{2}x^2 + K(y) \Rightarrow u_y = K'(y).$$

Então $u_y = -v_x \Rightarrow K'(y) = -\dfrac{\partial(x-5xy)}{\partial x} = -1+5y$

$$\Rightarrow K(y) = \int(-1+5y)\,dy = -y + \frac{5}{2}y^2 + C$$

Concluímos então que uma função analítica cuja parte imaginária seja a dada no enunciado, satisfaz

$$\operatorname{Re}(f(z)) = -\frac{5}{2}x^2 - y + \frac{5}{2}y^2 + C,$$ para alguma constante C.

Como $f(0)=1$, temos

$$f(0) = (0 + 5\times 0) + C + i\times 0 = 1,$$

ou seja, $C = 1$;

Logo tem de ser

$$f(z) = \left(-\frac{5}{2}x^2 - y + \frac{5}{2}y^2 + 1\right) + i(x - 5xy).$$

Esta função satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em todo o $\mathbb{C}$, tendo u e v derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$. Trata-se pois de uma função analítica.

3. Sejam C_1 e C_2 dois contornos em R ambos ligando z_0 a z_1. Então $C_1 - C_2$ é um contorno fechado que se inicia e acaba em z_0, e está todo contido em R.

Por hipótese, $\displaystyle\int_{C_1 - C_2} f(z)\,dz = 0$.

Então

$$\int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz$$

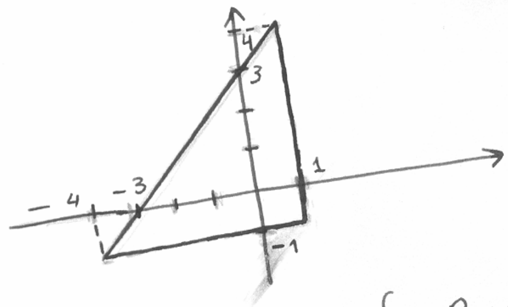
$$= \int_{C_1 - C_2} f(z)\,dz$$

$$= 0$$

pelo que

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

4. a)



b) (i) $\displaystyle\oint_T \mathrm{Re}(z)\,dz = \int_{T_1} \mathrm{Re}(z)\,dz + \int_{T_2} \mathrm{Re}(z)\,dz + \int_{T_3} \mathrm{Re}(z)\,dz$

1. iso por

onde T_1 é dado por $z = t - i$, $-4 \le t \le 1$,

T_2 é dado por $z = 1 + it$, $-1 \le t \le 4$

e T_3 é o caminho simétrico de $z = t + i(t+3)$, $-4 \le t \le 1$.

Então:

$$\oint_T Re(z)\,dz = \int_{-4}^{1} t\,(t-i)'\,dt + \int_{-1}^{4} 1\,(1+it)'\,dt - \int_{-4}^{1} t\,(t+i(t+3))'\,dt$$

$$= \int_{-4}^{1} t\,dt + \int_{-1}^{4} i\,dt - \int_{-4}^{1} t\,(1+i)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-4}^{1} + i\,(4-(-1)) - (1+i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-4}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{16}{2} + 5i - (1+i)\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 8 + 5i - \frac{1}{2} + 8 - i\frac{1}{2} + 8i$$

$$= \frac{25}{2}i$$

(ii) $z^2+4=0 \Leftrightarrow z^2=-4 \Leftrightarrow z = \pm 2i$. onde a

T está contida numa região simplesmente conexa onde a

função $f(z) = \dfrac{i}{(z^2+4)^2}$ é analítica excepto no ponto $z = 2i$.

Assim $\displaystyle\oint_T \frac{i}{(z^2+4)^2}\,dz = 2\pi i\, Res(f; 2i)$

Como $\displaystyle\lim_{z \to 2i} \left[(z-2i)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 2i} \frac{i}{(z+2i)^2} = \frac{i}{(4i)^2} \neq 0, \infty$,

$2i$ é um pólo de ordem 2 e, portanto,

$$Res(f; 2i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2i} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-2i)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 2i} \frac{-2i}{(z+2i)^3} = \frac{-2i}{(4i)^3} =$$

$$= -\frac{2i}{2^6(-i)} = \frac{1}{2^5}$$

Então $\displaystyle\oint_T \frac{i}{(z^2+4)}\,dz = 2\pi i \times \frac{1}{2^5} = \frac{\pi i}{2^4} = \frac{\pi i}{16}.$

(iii) $2z-8=0 \iff 2z=8 \iff z=\frac{8}{2}=4$

T está contido numa região simplesmente conexa onde a função $\dfrac{e^{z^3}}{(2z-8)^3}$ é analítica. Logo, pelo Teorema de Cauchy,

$$\oint_T \frac{e^{z^3}}{(2z-8)^3}\,dz = 0.$$

para

(b) $\displaystyle\frac{e^z}{z+2} = \frac{1}{z+2}\,e^{(z+2)-2} = \frac{e^{-2}}{z+2}\cdot e^{z+2} = \frac{e^{-2}}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2}}{n!}(z+2)^{n-1}$$

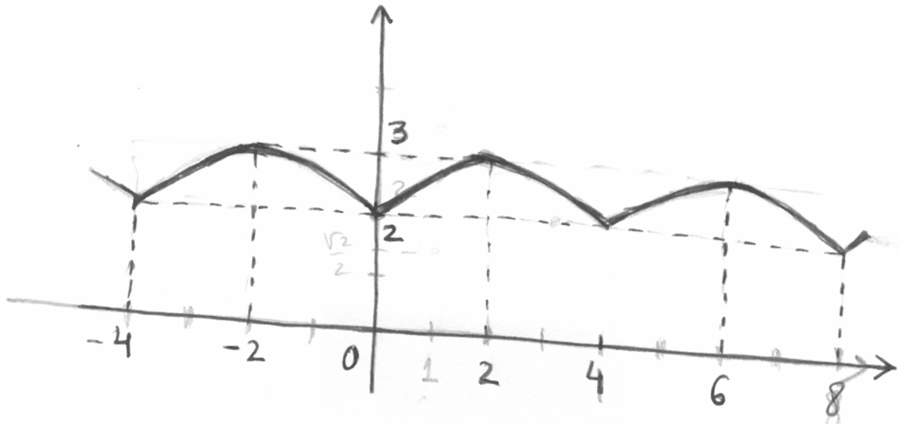
Este desenvolvimento é válido para $z \neq -2$, logo válido para $|z+2|>4$.

5 (a) $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z+2)+2} = \frac{1}{3-(z+2)} = \frac{\frac{1}{z+2}}{\frac{3}{z+2}-1} = -\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z+}}$

$$= -\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z+2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-3^n\right)\cdot(z+2)^{-n-1}$$

Este desenvolvimento é válido para $\left|\frac{3}{z+2}\right| < 1$, ou seja, para $|z+2|>3$ e, portanto, é em particular válido para $|z+2|>4$.

6 (a)



(b) A função $h(t)$ é da forma

$$h(t) = f(t) + 2$$

com $f(t)$ uma função do tipo do 5º sinal apresentado na Tabela de Coeficientes de Fourier, com

$$X_0 = 1 \quad e \quad T_0 = 4$$

Então os coeficientes de Fourier de h são:

$$c_0 = c_{0f} + 2 = \frac{2X_0}{\pi} + 2 = \frac{2}{\pi} + 2$$

$$c_k = c_{kf} = \frac{-2X_0}{\pi(4k^2-1)} = -\frac{2}{\pi(4k^2-1)}, \quad \text{se } k \neq 0.$$

Usando a relação entre as séries de Fourier na forma exponencial e na forma trigonométrica combinada, tem-se

$$|C_0| = \frac{2}{\pi} + 2 \quad e \quad \theta_0 = 0;$$

$$C_K = \frac{2}{\pi(4K^2-1)} e^{-i\pi}, \text{ pelo que } |C_K| = \frac{2}{\pi(4K^2-1)} \quad e \quad \theta_K = -\pi.$$

Então,

o 1º termo é

$$\frac{2}{\pi} + 2 \,;$$

o 2º é

$$2 \times \frac{2}{\pi(4 \times 1^2 - 1)} \cos\left(\frac{2\pi t}{4} - \pi\right)$$

ou seja,

$$\frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2} - \pi\right);$$

o 3º é

$$\frac{2 \times 2}{\pi(4 \times 2^2 - 1)} \cos\left(\frac{2 \times 2\pi t}{4} - \pi\right)$$

ou seja,

$$\frac{4}{15\pi} \cos(\pi t - \pi).$$

7 (a) Uma resolução:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt = \int_{-2}^{2} e^{-i\omega t} \cdot 1\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-2}^{2} = \frac{e^{-i\omega 2} - e^{i\omega 2}}{-i\omega} = 2\times\frac{e^{i2\omega} - e^{-i2\omega}}{2i\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin(2\omega) = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

Outra resolução:

$f(t) = rect(t/4)$ e, usando a Tabela das transformadas de Fourier, tem-se

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 4\,sinc(4\omega/2) = 4\,sinc(2\omega)$$
$$= 4\,\frac{\sin(2\omega)}{2\omega}$$
$$= \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

(b) (i) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega-1}\,\frac{2\sin 2\omega}{\omega}\,d\omega = e^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega}F(\omega)\,d\omega$$

$$= 2\pi e^{-1}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega}F(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{e}\left(\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}\right)_{t=1} = \frac{2\pi}{e}\,f(1) = \frac{2\pi}{e}\times 1 = \frac{2\pi}{e}$$

(ii) $$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\,\sin 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\cos\omega\,\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\cos\omega\,F_c(\omega)\,d\omega$$, porque com f é par, tem-se $F(\omega) = F_c(\omega)$,

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos w\, F_c(w)\,dw = \frac{\pi}{2}\left(\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(w)\}\right)_{t=1} = \frac{\pi}{2} f(1) = \frac{\pi}{2}$$

(iii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2it} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2it} f(t-2)\,dt$$

$$= \left(\mathcal{F}\{f(t-2)\}\right)_{w=2}$$

$$= \left(F(w)\, e^{i(-2)w}\right)_{w=2}$$

$$= \left(\frac{2\sin(2w)}{w}\, e^{-2iw}\right)_{w=2}$$

$$= \frac{2\sin 4}{2}\, e^{-4i} = e^{-4i}\sin 4.$$

(iv) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-v)\,\delta(v)\,dv\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it}\left(f(t) * \delta(t)\right) dt$$

$$= \left(\mathcal{F}\{f(t) * \delta(t)\}\right)_{w=1}$$

$$= \left(\frac{2\sin(2w)}{w}\cdot 1\right)_{w=1}$$

$$= 2\sin 2$$

b. $\mathcal{L}_b\{h(t)\} = \int_{-\infty} e^{-st} e^{3t} 2t \, u(-t) \, dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-st} e^{3t} 2t \, dt$$

$$= \int_{+\infty}^{0} e^{-s(-u)} e^{3(-u)} 2(-u)(-1) \, du$$

$t = -u$

$dt = -du$

$t = 0 \Rightarrow u = 0$

$t = -\infty \Rightarrow u =$

$$= -\int_{0}^{+\infty} e^{-(-s)u} e^{-3u} 2u \, du$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} e^{-(-s)t} e^{-3t} 2t \, dt$$

$$= -\left(\mathcal{L}\left\{e^{-3t} 2t\right\}\right)_{s \to -s} \quad , \text{ para } Re(-s) > -$$

$$= -\left(2 \frac{1}{(s+3)^2}\right)_{s \to -s} \quad , \text{ para } -Re(s) > -3$$

$$= -\frac{2}{(-s+3)^2} \quad , \text{ para } Re(s) < 3$$

9. (a) $\mathcal{Z}\{x[n]\} = 1 \times z^{-0} + 0 \times z^{-1} + (-1) \times z^{-2} + 0$

$$= 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{z^2-1}{z^2}$$

(b) Aplicando a transformada-z a ambos os membros da equação, obtemos:

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 3z^{-2}Y(z) = \frac{z^2-1}{z^2}. \qquad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2}\right) Y(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{z^2-1}{z^2} \times \frac{z^2}{z^2+2z-3}$$

$$\underset{(z \neq 0)}{\Leftrightarrow} Y(z) = \frac{z^2-1}{z^2+2z-3}$$

Logo $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2-1}{z^2+2z-3}\right\}$

$$\frac{z^2-1}{z^2+2z-3} = \frac{(z+1)(z-1)}{(z+3)(z-1)} = \frac{z+1}{z+3}, \text{ para } z \neq 1.$$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z+1}{z+3}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+3}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1} \cdot \frac{z}{z+3}\right\}$$

$$= (-3)^n + \left[(-3)^n\right]_{n \to n-1} \cdot u[n-1]$$

$$= (-3)^n + (-3)^{n-1} \cdot u[n-1].$$