DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
Métodos de Análise Complexa
Eng. de Sistemas e Informática

Ficha Prática nº 6
Séries de Fourier

1. Determine os coeficientes de Fourier da forma exponencial de $f(t) = \cos 2t + 3\cos 4t$.

2. (a) Mostre que para $m \neq n$, as funções $\cos m\omega_0 t$ e $\cos n\omega_0 t$ são ortogonais numa amplitude de T_0, onde $w_0 = 2\pi/T_0$.

   (b) Mostre que para $m \neq n$, as funções $\cos m\omega_0 t$ e $\sin n\omega_0 t$ são ortogonais numa amplitude de T_0, onde $w_0 = 2\pi/T_0$.

   (c) Mostre que para $m \neq n$, as funções $\sin m\omega_0 t$ e $\sin n\omega_0 t$ são ortogonais numa amplitude de T_0, onde $w_0 = 2\pi/T_0$.

   Sugestão: Recorde que $\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$, $\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$ e $\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B))$.

3. (a) Verifique se as funções dadas podem ser representadas em séries de Fourier e, em caso afirmativo, determine os coeficientes de Fourier relativos à forma exponencial.
   (i) $x(t) = 3 + \cos t + 5\sin 4\pi t$
   (ii) $x(t) = 2\cos(4t + \frac{\pi}{3}) - 5\cos(6t - \frac{\pi}{4})$
   (iii) $x(t) = |5\sin \pi t|$

   (b) Faça o mesmo que em (a) para a forma trigonométrica combinada.

4. Determine os coeficientes de Fourier da forma exponencial e da forma trigonométrica combinada da função periódica

$$x(t) = 5 - 10\cos 10^6 t + 4\cos 10^7 t + 2\sin(1.1 \times 10^7 t)\,.$$

5. Determine a forma exponencial da série de Fourier para os sinais representados na Figura 1 de duas formas diferentes:

   (i) Usando a Tabela 2.
   (ii) Usando a definição.

6. Determine a forma trigonométrica combinada da série de Fourier para os sinais representados na Figura 2.

7. Considere as funções da Figura 2. Para k suficientemente grande, o k-ésimo coeficiente de Fourier decresce em magnitude à razão de $1/k^m$. Use as propriedades das séries de Fourier para determinar m para as funções representadas em (a), (c) e (d).

8. Mostre que se a série
$$a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$
converge uniformemente para $f(t)$ em $(-\pi, \pi)$, então os coeficientes a_n e b_n são precisamente os coeficientes de Fourier de f.

9. (a) Encontre os coeficientes de Fourier correspondentes à função g de período 10 tal que
$$g(t) = \begin{cases} 0 & -5 < t < 0 \\ 3 & 0 < t < 5 \end{cases}$$
   (b) Escreva a série de Fourier correspondente.
   (c) Como se deve definir $g(t)$ em $t = -5$, $t = 0$ e $t = 5$ para que a série de Fourier convirja para $g(t)$ para $-5 \leq t \leq 5$?

10. Extenda a função $f(t) = \sin t$, $0 < t < \pi$, ao intervalo $(-\pi, \pi)$ de forma a obter uma função par e faça o desenvolvimento em série de Fourier em cosseno dessa função.

11. Considere a função f de período 8 tal que
$$f(t) = \begin{cases} -t & -4 < t \leq 0 \\ t & 0 \leq t < 4 \end{cases}$$
   (a) Determine os coeficientes de Fourier de f e escreva a série de Fourier correspondente.
   (b) Defina f em $\mathbb{R}$ de forma a que a série de Fourier seja convergente para $f(t)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

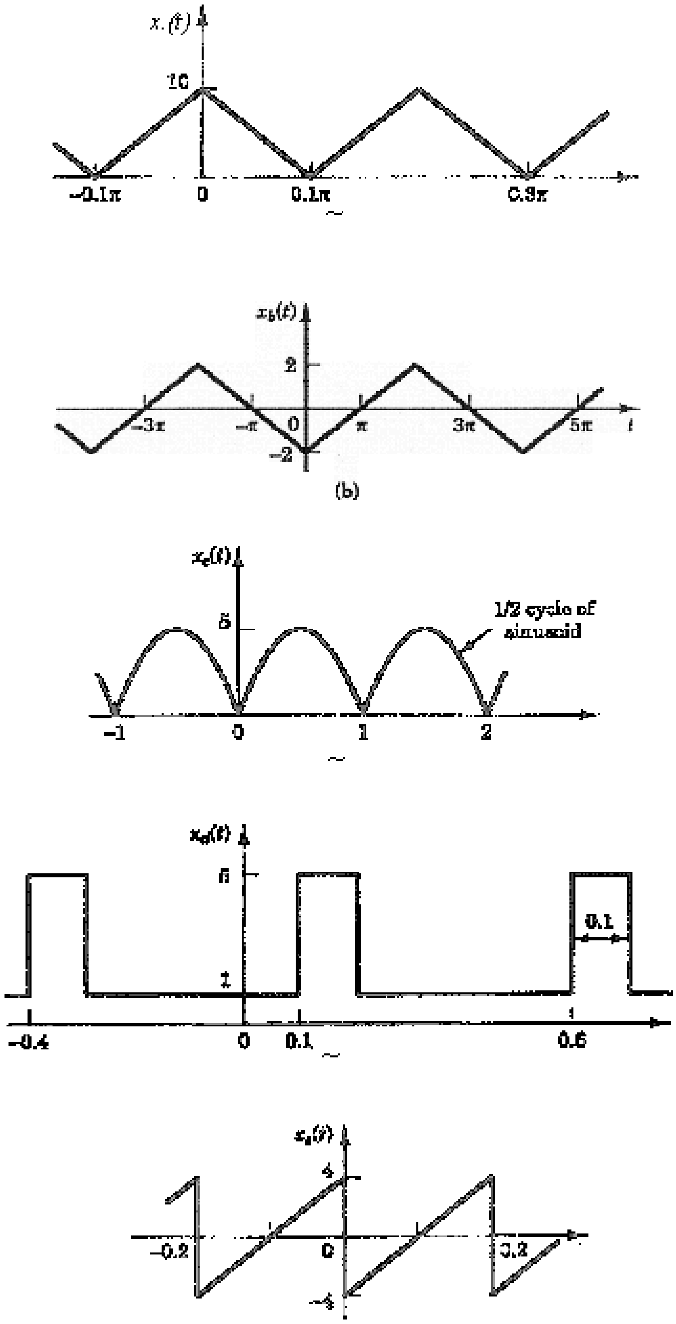
x.(t)
10
−0.1π
0
0.1π
0.3π
x_b(t)
2
−3π
−π
0
π
3π
5π
t
−2
(b)
x_c(t)
5
1/2 cycle of sinusoid
−1
0
1
2
x_d(t)
5
0.1
1
−0.4
0
0.1
0.6
4
−0.2
0
0.2
−4

Figura 1

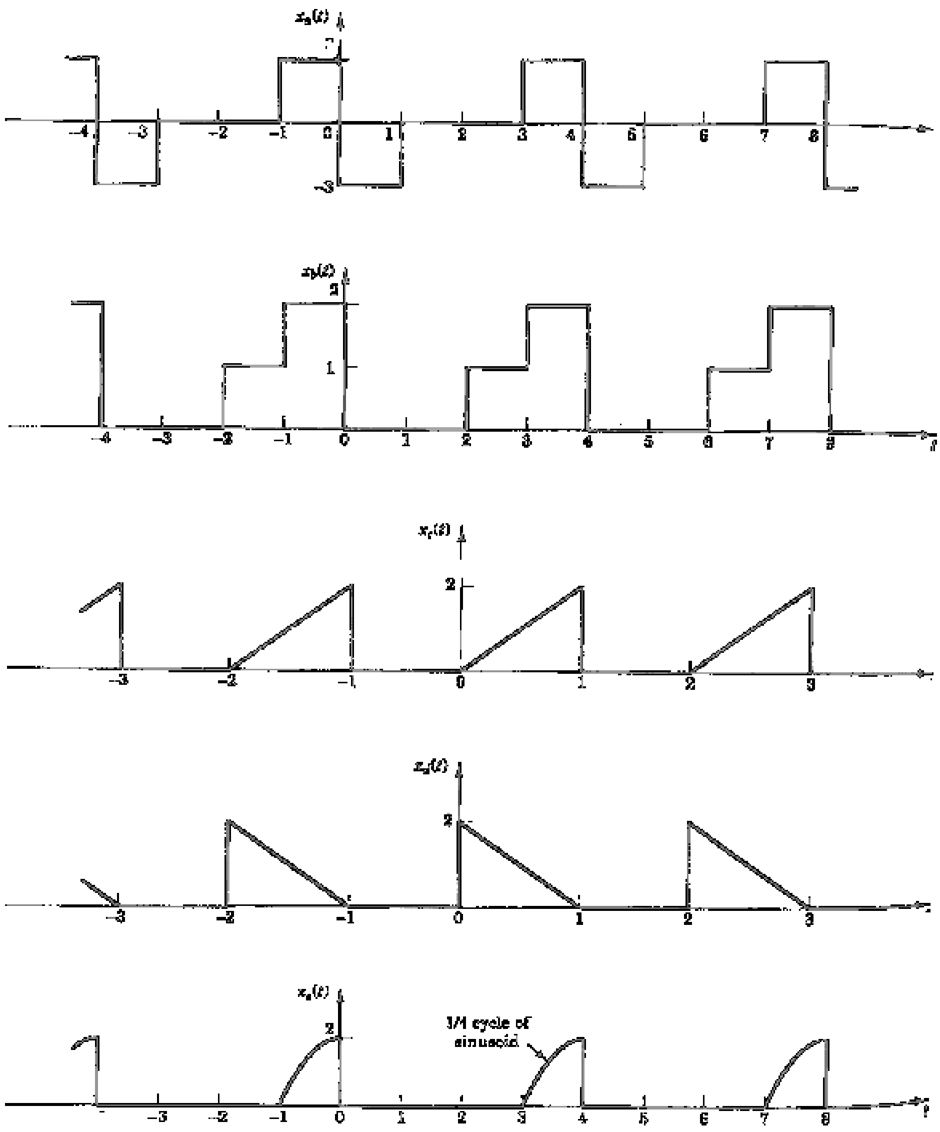

Figura 2