DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
Métodos de Análise Complexa
Eng. de Sistemas e Informática

Ficha Prática nº 5
Resíduos e Integrais

1. Determine os pólos e respectivas ordens de cada uma das funções seguintes:

   (a) $\dfrac{z+4}{z(z^2+1)^2}$; (b) $\dfrac{\sin z}{z^3(z-\pi)}$; (c) $\dfrac{1}{z\sin^2(\pi z)}$;

   (d) $\dfrac{1-e^z}{z^4\sin(1+z)}$; (e) $\dfrac{1}{(e^{iz}-1)^2}$; (f) $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$.

2. Determine a parte singular da função:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$$

   relativa ao pólo $z = i$.

3. Mostre que $z = 0$ é singularidade removível das funções:

   (a) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$;

   (b) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sin z}$.

4. Seja $f(z)$ uma função analítica e diferente de zero no ponto $z = z_o$. Mostre que a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_o}$$

   tem um pólo simples nesse ponto, com resíduo igual a $f(z_o)$.

5. Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções regulares no ponto z_o, $p(z_o) \neq 0$, $q(z_o) = 0$ e $q'(z_o) \neq 0$. Mostre que z_o é pólo simples da função

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

   com resíduo igual a $\frac{p(z_o)}{q'(z_o)}$.

6. Determine os pólos, as ordens e os resíduos de cada uma das funções seguintes :

   (a) $\dfrac{z-\sin z}{z^4}$; (b) $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$; (c) $\coth z$; (d) $\dfrac{e^z}{4z^2+\pi^2}$.

   Sugestão: Desenvolva os numeradores de (a) e (b) em séries de potências; use o resultado do exercício anterior em (c) e (d).

7. Determine o resíduo de
$$f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{(z-\pi)^4}$$
   no seu pólo $z = \pi$,

   (a) por meio do cálculo de um limite;
   (b) desenvolvendo $e^{i\pi z} = e^{i\pi^2} e^{i\pi(z-\pi)}$ em série de potências de $z - \pi$.

8. Determine os pólos e calcule os resíduos correspondentes para as seguintes funções:
   (a) $\dfrac{e^{3z}}{z(z-1)^2}$; (b) $\dfrac{1}{z\sin z}$; (c) $\dfrac{e^z}{z\sin z}$.

9. Calcule o integral
$$\oint_C \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)}\, dz\,,$$
   onde C é a circunferência:
   (a) $|z| = 3$; (b) $|z+3i| = 3$; (c) $|z-2i| = 1/3$; (d) $|z-i| = 2$.

10. Calcule os seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z}\, dz$; (b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \tan 3z\, dz$; (c) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cot z}{z}\, dz$.

11. Calcule os seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin^2\theta}$; (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta}\,,\ \ a^2 < 1$;

    (c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta}\,,\ \ a^2 < 1$; (d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos^2\theta}\,,\ \ a > b > 0$.

12. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

13. Sendo a, b e c números reais, $b^2 < 4ac$, verifique que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}\,.$$

14. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

onde $a \geq b > 0$; considere as duas possibilidades: $a \neq b$ e $a = b$.

Sugestão: O integrando $f(x)$ é função par, $f(-x) = f(x)$, logo

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx\ .$$

15. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+9}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-x+1}$; (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}\,,\quad a>0$;

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

16. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+4}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\,dx\,,\quad a>0$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$.