Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia
Instituto Politécnico de Viseu

Métodos de Análise Complexa
Engenharia de Sistemas e Informática
Exame - 25/01/2006

Duração: 2h 30m

1. Represente geometricamente o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - \frac{1+i}{1-i}| \geq 1 \, \wedge \, \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}\}$$

e diga, justificando sucintamente, se é aberto, fechado, limitado, compacto, conexo, simplesmente conexo.

2. Determine uma função analítica f tal que $\mathrm{Im}(f(z)) = x - 5xy$ e $f(0) = 1$. (Sugestão: Use as equações de Cauchy-Riemann.)

3. Seja R uma região do plano complexo e f uma função analítica em R tal que $\oint_C f(z)dz = 0$ para todo o contorno C contido em R. Prove que, se z_0 e z_1 são dois pontos de R e C_1 e C_2 são dois contornos em R, ambos ligando z_0 a z_1, então $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

4. Seja T constituído pelos lados do triângulo no plano complexo de vértices $-4 - i$, $1 - i$ e $1 + 4i$.
   (a) Esboce T.
   (b) Indique o valor de cada um dos integrais seguintes, apresentando os cálculos efectuados ou justificando sucintamente.

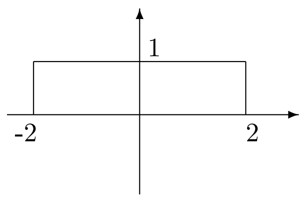
   (i) $\oint_T \mathrm{Re}(z)\, dz$ (ii) $\oint_T \frac{i}{(z^2+4)^2} dz$ (iii) $\oint_T \frac{e^{z^3}}{(2z-8)^3} dz$

5. Desenvolva em série de potências de $z + 2$, para $|z + 2| > 4$, as seguintes funções:
   (a) $\frac{1}{1-z}$ (b) $\frac{e^z}{z+2}$

6. Considere a função h periódica de período 4 que no intervalo $[0, 4]$ é definida por $h(t) = \sin(\frac{\pi}{4}t) + 2$.
   (a) Esboce a função.
   (b) Determine os coeficientes de Fourier da forma exponencial. (Sugestão: Use a Tabela dos Coeficientes de Fourier.)
   (c) Determine os primeiros três termos não nulos da sua série de Fourier na forma trigonométrica combinada.

V.S.F.F.

7. Seja $f(t)$ o sinal representado na figura



(a) Mostre que a transformada de Fourier de $f(t)$ é $F(\omega) = \dfrac{2\sin 2\omega}{\omega}$.

(b) Use a alínea anterior e os seus conhecimentos sobre transformadas de Fourier para determinar o valor dos seguintes integrais:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega-1}\frac{2\sin 2\omega}{\omega}\,d\omega$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x \sin 2x}{x}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2it} g(t)\,dt$, onde $g(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } t \in [0,4] \\ 0 \text{ se } t \notin [0,4] \end{cases}$

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-v)\delta(v)dv\right) dt$

8. Determine a transformada de Laplace bilateral da função $h(t) = e^{3t}\sin 2t\, u(-t)$, indicando o seu domínio de definição.

9. Seja $x[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ -1, & \text{se } n = 2 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$.

(a) Determine a transformada-z de $x[n]$.

(b) Resolva a seguinte equação às diferenças

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n]\,.$$

Cotação:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
	1.5	1.5	1.5	3.5	2	3	3.5	1	2.5