Capítulo 4: Interpolação Polinomial

1. Introdução

Suponhamos que conhecemos a função f em apenas em (n+1) pontos do intervalo [a,b] e que pretendemos conhece-la em qualquer outro ponto desse intervalo. Para tal vamos, com base nos pontos conhecidos, construir uma função que “substitua” f(x) dentro de um limite de precisão. Uma tal função designa-se por função aproximante.

A escolha da função aproximante é aqui um polinómio, mas poderia ser outra. Se escolhêssemos funções racionais teríamos interpolação racional, se escolhêssemos funções exponenciais teríamos interpolação exponencial.

Seja, então, f uma função definida em A, $f: A \subseteq \Re \rightarrow \Re$, e admitamos que são conhecidos os pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$, com $x_i < x_{i+1}$, i=0,..., n-1 sendo x_0=a e x_n=b. Pretende-se aproximar f(x), $x \in [x_0, x_n]$, por um polinómio

$$\mathbf{P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0} \qquad (1)$$

tal que nos pontos conhecidos $P_n(x)$ coincida com a função f(x), i.é., que satisfaça:

$$\mathbf{P_n(x_i)=f(x_i)\ i=0,...,n} \qquad (2)$$

Diremos que $P_n(x)$ é um polinómio interpolador para f(x) nos pontos dados, $(x_i, f(x_i))$ i=0,...,n, que serão o suporte da interpolação.

Assim, dados (n+1) pontos $(x_i, f(x_i))$, i=0,...,n, a existência de um polinómio que satisfaça (2) e acerca da unicidade e do grau do polinómio temos informação através do seguinte teorema:

Teorema: Sejam dados (n+1) pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, $(x_i \neq x_j)$, e os valores de f(x) nesses pontos $f(x_0), f(x_1), ...,f(x_n)$. Então existe um único polinómio $P_n(x)$ de grau inferior ou igual a n que satisfaz a $f(x_i)=P_n(x_i)$, i=0, ...,n.

2. Interpolação polinomial: linear e quadrática

O caso linear é o caso mais simples da interpolação. Dados dois pontos distintos de uma função y=f(x), (x_0, f(x_0)) e (x_1, f(x_1)), e $\bar{x} \in (x_0, x_1)$ pretendemos saber, usando a interpolação polinomial, o valor de $\bar{y} = f(\bar{x})$.

Pelo teorema anterior, vamos construir um polinómio de grau um,

$$\mathbf{P_1(x)=a_0+a_1x}$$

Mas P_1(x) tem de ser tal que:

$$\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) = y_0 \\ P_1(x_1) = f(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Para obtermos o valor dos coeficientes a_0 e a_1 temos que resolver o sistema anterior em ordem a a_0 e a_1. A matriz dos coeficientes é, A=$\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}$, sendo que det(A)=$x_0$-$x_1$. O sistema anterior tem solução única se det(A)≠0, i.é., se $x_0 \neq x_1$. Ou seja, para pontos distintos o sistema tem solução única.

Interpretação Geométrica

O polinómio $P_1(x)=a_0+a_1x$ é a equação da recta que passa nos pontos (x_0, f(x_0)) e (x_1, f(x_1)) .

Exemplo: Consideremos a função f definida pelos pontos (0, 1.35) e (1, 2.94). Determinar aproximadamente o valor de f(0.73).

Como temos dois pontos vamos construir um polinómio de grau um, i.é., $P_1(x)=a_0+a_1x$., P_1 é tal que :

$$\begin{cases} P_1(0) = 1.35 \\ P_1(1) = 2.94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \times 0 + a_0 = 1.35 \\ a_1 \times 1 + a_0 = 2.94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1.35 \\ a_1 = 1.59 \end{cases}$$

ou seja, $P_1(x)=1.35+1.59x$ e f(0.73) ≅ $P_1(0.73)=2.51$

O cálculo de a_0 e a_1 está afectado por dois tipos de erro:

i. Erro de arredondamento,

ii. Erro de truncatura — cometido quando decidimos aproximar a função f por um polinómio de grau um.

Erro de truncatura

O erro de truncatura cometido no ponto $\bar{x}$ é dado pela fórmula:

$$E_T(\bar{x})=f(\bar{x})-P_1(\bar{x})$$

O erro de truncatura é uma função que se anula nos pontos x_0 e x_1, pois $f(x_0)=P_1(x_0)$ e $f(x_1)=P_1(x_1)$ então:

$$E_T(x)=(x-x_0)(x-x_1)A,$$

onde A é uma constante a determinar.

Obtenção de A

Consideremos a função auxiliar

$$G(t)=f(t)-P_1(t)-E_T(t),$$

ou seja,

$$G(t)=f(t)-(a_1t+a_0)-(t-x_0)(t-x_1)A$$

A função G(t) anula-se em pelo menos três pontos $t=x_0$, $t=x_1$, $t=\bar{x}$. Se considerarmos que f(t) é contínua e diferenciável em (x_0, x_1) e uma vez que $P_1(t)$ e $E_T(t)$ são polinómios também são, logo G(t) é contínua e diferenciável em (x_0, x_1), então podemos aplicar o teorema de Rolle a G(t).

Recordação!

Teorema de Rolle: Se f(x) é contínua e diferenciável no intervalo (a,b) e f(a)=f(b), então existe $\xi\in(a, b)$ tal que $f'(\xi)=0$.

Aplicando então o teorema de Rolle a G(t) conclui-se que:

$$\exists\ \xi_1 \in (x_0, \bar{x}): G'(\xi_1)=0$$

$$\exists\ \xi_2 \in (\bar{x}, x_1): G'(\xi_2)=0$$

Ou seja, G'(t) é tal que $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)$ e G'(t) é contínua e diferenciável em (ξ_1,ξ_2), aplicando novamente o teorema de Rolle a G'(t) concluímos que:

$$\exists\ \xi \in (\xi_1, \xi_2): G''(\xi)=0$$

Mas se $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ então $\xi \in (x_0, x_1)$. Além disso,

$$G'(t)=f'(t)-a_1-(t-x_1)A-(t-x_0)A$$

$$G''(t)=f''(t)-A-A=f''(t)-2A$$

Como $G''(\xi)=0$, então $f''(\xi)-2A=0 \Leftrightarrow A=\dfrac{f''(\xi)}{2}$

O erro de truncatura é então dado por:

$$E_T(x)=(x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi)}{2}, \text{ com } \xi \in (x_0, x_1)$$

<u>Nota</u>: Na maior parte das vezes não se conhece o valor exacto de ξ, como tal, consideramo-lo igual ao valor que maximiza $|f''(x)|$ em (x_0, x_1), i.é., ξ tal que $f''(\xi)=\max\limits_{x_0<x<x_1}|f''(x)|$.

<u>Exemplo</u>: Considere a função f(x)=sin(x). Utilizando os pontos (1, 0.84) e (2, 0.91) construa um polinómio de grau um que aproxime f. Calcule o valor aproximado de $f(\frac{\pi}{2})$. Determine o erro de truncatura cometido.

Pretendemos então $P_1(x)=a_0+a_1x$ que é tal que :

$$\begin{cases} P_1(1)=0.84 \\ P_1(2)=0.91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_0=0.84 \\ a_1\times 2+a_0=0.91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=0.77 \\ a_1=0.07 \end{cases}$$

então, $P_1(x)=0.77+0.07x$, e, $f(\frac{\pi}{2})\cong P_1(\frac{\pi}{2})=0.88$.

O erro de truncatura é dado por:

$$E_T(\frac{\pi}{2})=(\frac{\pi}{2}-1)(\frac{\pi}{2}-2)\frac{f''(\xi)}{2}, \text{ com } \xi \in (1, 2) \text{ e tal que } \xi=\max_{1<x<2}|f''(x)|$$

$f'(x)=\cos(x)$ e $f''(x)= -\sin(x)$, então o máximo de $|-\sin(x)|$ no intervalo (1,2) é atingido em $\frac{\pi}{2}$, donde $E_T(\frac{\pi}{2})=0.12$.

No caso da interpolação quadrática pretendemos aproximar a nossa função f por um polinómio do segundo grau da forma $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. Para tal precisamos de conhecer a função f em três pontos distintos.

Sejam $(x_i,\ y_i=f(x_i))$, i=0,1,2, três pontos distintos de f. Pretendemos $P_2(x)$ tal que

$$\begin{cases} P_2(x_0)=y_0 \\ P_2(x_1)=y_1 \\ P_2(x_2)=y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x_0^2+a_1x_0+a_0=y_0 \\ a_2x_1^2+a_1x_1+a_0=y_1 \\ a_2x_2^2+a_1x_2+a_0=y_2 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é

$$A=\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema tem solução única se $\det(A)\neq 0$, o que acontece se os três pontos forem distintos.

Erro de truncatura

O erro de truncatura é agora dado por $E_T(\bar{x})=f(\bar{x})-P_2(\bar{x})$. Seguindo um raciocínio análogo ao efectuado para o caso linear chegamos à conclusão que:

$$E_T(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!}, \text{ com } \xi \in (x_0,\ x_2).$$

3. Interpolação de Lagrange

Tanto a interpolação linear como a quadrática são casos particulares da interpolação de Lagrange.

Genericamente pretendemos determinar o polinómio interpolador de grau menor ou igual a n sendo conhecidos (n+1) pontos. Ou seja, pretendemos

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

onde P_n tem no máximo grau n. $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são determinados à custa da resolução do sistema:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = y_0 \\ P_n(x_1) = y_1 \\ \ldots. \\ P_n(x_n) = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \ldots. \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases},$$

cuja matriz é $A=\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{bmatrix}$. Prova-se que a solução do sistema anterior é única se $\det(A)\neq 0$, ou seja, se os (n+1) pontos forem todos distintos.

Obtenção fórmula de Lagrange

Consideremos os seguintes (n+1) polinómios de grau n

$$\begin{cases} p_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \\ p_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \\ \ldots \\ p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{cases},$$

ou de forma abreviada

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \qquad (3)$$

Os polinómios anteriores são tais que:

i. $p_i(x_i)\neq 0, \forall i$

ii. $p_i(x_j)=0, \forall i\neq j$.

Os polinómios anteriores chamamos polinómios de Lagrange.

Como o polinómio P_n que pretendemos determinar é de grau n e contém os pontos (x_i, y_i), i=0,...,n, podemos escrever P_n como combinação linear dos polinómios anteriores, p_n, i=0,...,n, ou seja,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x) \tag{4}$$

Então para determinar $P_n(x)$ basta calcular os b_i, i=0,...,n, já que os polinómios pi(x) são facilmente calculáveis. Tem-se então que:

$$P_n(x_k)=b_0p_0(x_k)+b_1p_1(x_k)+\ldots+b_kp_k(x_k)+\ldots+b_np_n(x_k),$$

mas $p_k(x_k)\neq 0$ e $p_i(x_k)=0$ para i=1,...,k-1,k+1,...,n, ou seja,

$$P_n(x_k)=b_kp_k(x_k) \Leftrightarrow b_k=\frac{P_n(x_k)}{p_k(x_k)}$$

Como por hipótese $P_n(x_i)=y_i$, i=0,...,n, então

$$b_i=\frac{y_i}{p_i(x_i)}, \text{ i=0,...,n.}$$

Substituindo o valor de b_i em (4) obtemos:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$$

e por (3) concluímos que:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}},$$

que é a **<u>fórmula do polinómio interpolador de Lagrange</u>**.

<u>Exemplo</u>: Determinar o polinómio interpolador de Lagrange para a função conhecida pelos pontos

x_i	y_i
0	0
0.2	2.008
0.4	4.064
0.5	5.125

Como a função é conhecida em quatro pontos vamos construir um polinómio de grau máximo, i.é., grau três,

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \Leftrightarrow P_3(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3}$$

$$y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3} + y_2 \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3} + y_3 \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\frac{x-x_2}{x_3-x_2} \Leftrightarrow$$

$$P_3(x) = 2.008\frac{x}{0.2}\frac{x-0.4}{0.2-0.4}\frac{x-0.5}{0.2-0.5} + 4.064\frac{x}{0.4}\frac{x-0.2}{0.4-0.2}\frac{x-0.4}{0.4-0.5} +$$

$$+5.125\frac{x}{0.5}\frac{x-0.2}{0.5-0.2}{}_1\frac{x-0.4}{0.5-0.4}$$

O polinómio interpolador é : $P_3(x) = x^3+10x$.

Erro de truncatura

Também aqui o erro de truncatura é dado por

$$E_T(\bar{x})=f(\bar{x})-P_n(\bar{x}).$$

Seguindo um processo análogo aos casos anteriores e tendo em atenção que P_n interpola f em (n+1) pontos obtêm-se:

$$E_T(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \ x_0<\xi<x_n.$$

De seguida vamos ver outras formas de construir o polinómio P_n.

4. Interpolação com diferenças divididas

Há várias formas de escrever o polinómio P_n, o polinómio interpolador de Lagrange, nem sempre é o mais conveniente. Vamos ver de seguida como construir o polinómio interpolador de Newton, para tal começaremos por definir o conceito de diferença dividida.

4.1. Conceito de diferença dividida

Seja f uma função da qual se conhecem os (n+1) pontos (x_i, y_i), i=0,...,n. A primeira derivada de f no ponto x_0 é definida por:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

A diferença dividida de primeira ordem define-se como sendo uma aproximação da primeira derivada,

$$f[x, x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (5)$$

Nota: As notações de diferença dividida são: f[,], [,] e ∇y.

Se em (5) fizermos $x= x_1$ obtemos a diferença dividida de primeira ordem em relação aos argumentos x_0 e x_1

$$\nabla^1 y_0 =f[x_1, x_0]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Note-se que

$$\nabla^1 y_0 =f[x_1, x_0]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}= f[x_0, x_1],$$

ou seja, $f[x_0, x_1]= f[x_1, x_0]$.

De um modo geral, define-se diferença dividida de primeira ordem em relação aos argumentos x_i, x_{i+1} como sendo:

$$\nabla^1 y_i =f[x_i, x_{i+1}]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

se recordarmos que $y_i=f(x_i)$ temos que

$$\nabla^1 y_i=f[x_i, x_{i+1}]=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$$

A diferença dividida de ordem zero é definida com $\nabla^0 y_i=f[x_i]=f(x_i)=y_i$.

Atendendo à definição de diferença dividida de ordem zero, podemos escrever as diferenças divididas de ordem um em função das diferenças divididas de ordem zero do seguinte modo:

$$\nabla^1 y_i = f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\nabla^0 y_{i+1} - \nabla^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Genericamente, a diferença dividida de ordem n é dada por:

$$\nabla^n y_i = f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} =$$

$$\frac{\nabla^{n-1} y_{i+1} - \nabla^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}$$

que é uma aproximação para a derivada de ordem n.

É usual construir-se uma tabela, chamada tabela das diferenças divididas, onde se colocam todos os valores anteriores.

x_i	$\nabla^0 y_i = y_i = f(x_i)$	$\nabla^1 y_i$	$\nabla^2 y_i$	...	$\nabla^n y_i$
x_0	y_0	$f[x_0, x_1]$			
x_1	y_1	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_2	y_2	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	....	$f[x_0, \ldots, x_n]$
...	...	...	...		
x_n	y_n	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		

Pela tabela anterior podemos concluir que:

i. Cada coluna é construída à custa da coluna anterior;
ii. Com (n+1) pontos podemos construir n diferenças divididas de primeira ordem, (n-1) de segunda ordem e assim sucessivamente, até à uma diferença dividida de ordem n.

Exemplo: Dada a função f pela tabela seguinte, construa a tabela das diferenças divididas.

x_i	y_i
0.3	3.09
1.5	17.25
2.1	25.41

A tabela das diferenças dividas é:

x_i	$\nabla^0 y_i = y_i = f(x_i)$	$\nabla^1 y_i$	$\nabla^2 y_i$
0.3	3.09	11.8	1
1.5	17.25	13.6	
2.1	25.41		

onde,

$$\nabla^1 y_0 = \frac{17.25 - 3.09}{1.5 - 0.3} = 11.8,\ \nabla^1 y_1 = \frac{25.41 - 17.25}{2.1 - 1.5} = 13.6 \text{ e } \nabla^2 y_0 = \frac{13.6 - 11.8}{2.1 - 0.3} = 1.$$

Ainda acerca das diferenças divididas, vejamos o seguinte corolário,

<u>Corolário</u>: Se f é uma função polinomial de grau n, então, todas as diferenças divididas de ordem n são iguais a uma constante e as de ordem (n+1) são nulas.

4.2. Fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas

Consideremos os (n+1) pontos distintos (x_i, y_i), i=0,...,n, e P_n o polinómio interpolador de grau n que contém esses pontos.

Pela definição de diferença dividida tem-se:

$$P_n[x, x_0] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow P_n(x) = P_n(x_0) + P_n[x, x_0](x - x_0)$$

mas,

$$P_n[x, x_0, x_1] = \frac{P_n[x, x_0] - P_n[x_0, x_1]}{x - x_1} \Leftrightarrow P_n[x, x_0] = \overbrace{P_n[x_0, x_1] + P_n[x, x_0, x_1](x - x_1)}$$

então,

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (P_n[x_0, x_1] + P_n[x, x_0, x_1](x - x_1))(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n[x_0, x_1](x-x_0)+P_n[x, x_0, x_1](x-x_1)(x-x_0)$$

No entanto,

$$P_n[x, x_0, x_1, x_2]=\frac{P_n[x,x_0,x_1]-P_n[x_0,x_1,x_2]}{x-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_n[x, x_0, x_1]=P_n[x_0, x_1, x_2]+P_n[x, x_0, x_1, x_2](x-x_2)$$

então

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n[x_0, x_1](x-x_0)+(P_n[x_0, x_1, x_2]+P_n[x, x_0, x_1, x_2](x-x_2))(x-x_1)(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow P_n(x)=P_n(x_0)+P_n[x_0,x_1](x-x_0)+P_n[x_0,x_1,x_2](x-x_1)(x-x_0)+P_n[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)(x-x_1)(x-x_0).$$

Desenvolvendo $P_n[x,x_0,x_1,x_2]$ e aplicando um raciocínio análogo ao anterior obtemos:

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n[x_0,x_1](x-x_0)+P_n[x_0,x_1,x_2](x-x_1)(x-x_0)+P_n[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+\ldots+P_n[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_{n-1})\ldots(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+P_n[x,x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0).$$

Como P_n é de grau n, pelo corolário anterior, concluímos que $P_n[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]=0$, além disso, como $P_n(x_0)=y_0$ podemos escrever:

$$P_n(x)=y_0+P_n[x_0,x_1](x-x_0)+P_n[x_0,x_1,x_2](x-x_1)(x-x_0)+P_n[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+\ldots+P_n[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_{n-1})\ldots(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)$$

Mas como $\nabla^i y_i=P_n[x_0,\ldots,x_i]$ podemos escrever o polinómio anterior do seguinte modo:

$$P_n(x)=y_0+\nabla^1 y_0(x-x_0)+\nabla^2 y_0(x-x_1)(x-x_0)+\nabla^3 y_0(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+\ldots$$
$$\ldots+\nabla^n y_0(x-x_{n-1})\ldots(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)$$

ou ainda,

$$P_n(x)=y_0+\sum_{i=1}^{n}\nabla^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$$

que é o **polinómio interpolador de Newton para diferenças divididas**.

Exemplo: Determinar o valor aproximado de f(0.4), usando todos os pontos tabelados da função f.

x_i	y_i
0.0	1.008
0.2	1.064
0.3	1.125
0.5	1.343
0.6	1.512

Vamos começar por construir a tabela das diferenças divididas.

x_i	$\nabla^0 y_i=y_i=f(x_i)$	$\nabla^1 y_i$	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
0.0	1.008	0.28	1.1	1	0
0.2	1.064	0.61	1.6	1	
0.3	1.125	1.09	2		
0.5	1.343	1.69			
0.6	1.512				

O polinómio interpolador de f é:

$P_4(x)=y_0+\nabla^1 y_0(x-x_0)+\nabla^2 y_0(x-x_1)(x-x_0)+\nabla^3 y_0(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+\nabla^4 y_0(x-x_0)$
$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

ou seja, $P_4(x)=1.008+0.028x+1.1x(x-0.2)+x(x-0.2)(x-0.3)$

então $f(0.4)\cong P_4(0.4)=1.216$.

Erro de truncatura

A fórmula do erro de truncatura para a interpolação de Newton é a mesma do que a cometida com a interpolação de Lagrange, tal deve-se ao facto de ambas utilizarem polinómios do mesmo grau. Assim,

$$E_T(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \; x_0<\xi<x_n.$$

5. Interpolação com diferenças finitas

5.1. Conceito de diferença finita

Admitamos agora que os pontos x_i são igualmente espaçados, i.e., $x_i=x_{i-1}+h$, $i=1,...,n$, sendo h uma constante que designamos por passo.

O facto de os pontos serem igualmente espaçados deve ser aproveitado, pois entre outras razões os cálculos vêm mais simplificados, o que nos leva a utilizar outro operador.

Antes de definirmos diferença finita, consideremos uma variável auxiliar, z, dada por:

$$z=\frac{x-x_0}{h} \Leftrightarrow zh=x-x_0$$

então

$$x-x_1=x-(x_0+h)=x-x_0-h=zh-h=(z-1)h$$

$$x-x_2=x-(x_1+h)=x-x_1-h=(z-1)h-h=(z-2)h$$

continuando o raciocínio anterior conclui-se que:

$$x-x_{n-1}=x-(x_{n-2}+h)=x-x_{n-2}-h=(z-(n-2))h-h=(z-(n-2)-1)h=(z-(n-1))h$$

substituindo os valores anteriores em

$$P_n(x)=y_0+\nabla^1 y_0(x-x_0)+\nabla^2 y_0(x-x_1)(x-x_0)+\nabla^3 y_0(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+...+$$
$$\nabla^n y_0(x-x_{n-1})...(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$P_n(x)=y_0+zh\nabla^1 y_0+zh(z-1)h\nabla^2 y_0+zh(z-1)h(z-2)h\nabla^3 y_0+...+zh(z-1)h(z-2)h....$$
$$\ldots(z-(n-1))h\nabla^n y_0 \Leftrightarrow$$

$$P_n(x)=y_0+zh\nabla^1 y_0+zh^2(z-1)\nabla^2 y_0+z(z-1)(z-2)h^3\nabla^3 y_0+...+z(z-1)(z-2)...$$
$$\ldots(z-(n-1))h^n\nabla^n y_0 \Leftrightarrow \qquad (6)$$

$$P_n(x)=y_0+\sum_{i=1}^{n} h^i \nabla^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1}(z-j),$$

Trata-se do polinómio interpolador de Newton para pontos igualmente espaçados.

Vamos introduzir de seguida o conceito de diferença finita, válido apenas quando x_i-x_{i-1}=h, i=1,...,n,.

Define-se diferença finita de:

i. Ordem zero: $\Delta^0 y_i = y_i$

ii. Ordem um: $\Delta^1 y_i = y_{i+1} - y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i$

iii. Ordem dois: $\Delta^2 y_i = \Delta^1 y_{i+1} - \Delta^1 y_i$

iv. Ordem n: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

Exemplo: Construir a tabela das diferenças finitas para a função dada pela tabela:

x_i	y_i
3.5	9.82
4.0	10.91
4.5	12.05
5.0	13.14
5.5	16.19

A tabela das diferenças finitas

x_i	$\Delta^0 y_i = y_i = f(x_i)$	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
3.5	9.82	1.09	0.05	-0.1	2.11
4.0	10.91	1.14	-0.05	2.01	
4.5	12.05	1.09	1.96		
5.0	13.14	3.05			
5.5	16.19				

5.2. Fórmula de Gregory-Newton para interpolação com diferenças finitas

De seguida vamos enunciar um teorema que relaciona as diferenças divididas e as diferenças finitas.

Teorema: seja f uma função definida nos pontos (x_i, y_i), i=0,...,n, tais que $x_{i+1}-x_i=h$, $\forall i$. Tem-se que: $\nabla^n y_i = \dfrac{\Delta^n y_i}{n!\,h^n}$.

Tendo em consideração o teorema anterior se substituirmos $\nabla^n y_0$ por $\dfrac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$ em (6) obtemos:

$$P_n(x)=y_0+zh\frac{\Delta y_0}{h}+zh^2(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}+z(z-1)(z-2)h^3\frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}+\ldots+z(z-1)(z-2)\ldots$$

$$\ldots(z-(n-1))h^n\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$$

$$\Leftrightarrow P_n(x)=y_0+z\,\Delta y_0+z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}+z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}+\ldots+z(z-1)(z-2)\ldots(z-(n-1))\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

ou de forma condensada

$$\boxed{P_n(x)=y_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta^i y_0}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}(z-j)}$$

que é a **fórmula de Gregory-Newton** para diferenças finitas.

Mostra-se de modo análogo que o erro de truncatura é dado por:

$$E_T(z)=h^{n+1}z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ x_0<\xi<x_n.$$

<u>Exemplo</u>: Dada a função f, conhecida nos pontos abaixo tabelados, calcule um valor aproximado para f(0.25).

x_i	y_i
0.1	0.125
0.2	0.064
0.3	0.027
0.4	0.008
0.5	0.001

Vamos começar por construir a tabela das diferenças finitas.

x_i	$\Delta^0 y_i = y_i = f(x_i)$	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0.1	0.125	-0.061	0.024	-0.006	0
0.2	0.064	-0.037	0.018	-0.006	
0.3	0.027	-0.019	0.012		
0.4	0.008	-0.007			
0.5	0.001				

De seguida vamos construir um polinómio interpolador de f de grau máximo.

$$P_4(x)=y_0+z\Delta y_0+z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}+z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}+z(z-1)(z-2)(z-3)\frac{\Delta^4 y_0}{4!}$$

ou seja, $P_4(x)=0.125-0.061z+0.024z(z-1)-0.006z(z-1)(z-2)$,

com $z=\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-0.1}{0.1}=10x-1$, donde

$$P_4(x)=0.125-0.061(10x-1)+0.024(10x-1)(10x-2)-0.006(10x-1)(10x-2)(10x-3).$$

Então $f(0.25)\cong P_4(0.25)=0.043$.

6. Interpolação de Hermite

Supondo que f é duas vezes diferenciável, sabe-se que um zero, x_i , de f se diz de *multiplicidade dois* se $f(x_i)=0$, $f'(x_i)=0$ e $f''(x_i)\neq 0$. Diremos que duas funções **f e g 2-osculam** (**osculam 2-vezes**) um ponto x_i, se x_i é zero de multiplicidade 2 da função $(f-g)(x)$, isto é,

$$f(x_i)=g(x_i)$$

$$f'(x_i)=g'(x_i)$$

$$f''(x_i)\neq g''(x_i).$$

Tal comportamento significa que g interpola f e g' interpola f ' em $x=x_i$. Nestes casos falamos de **interpolação osculatória** ou **repetida** ou **de Hermite**. Por exemplo, é bem conhecido um polinómio (n+1)-osculador de f(x) no ponto x=0 — o polinómio de Mclaurin de f:

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Com efeito,

$$p_n(0)=f(0)$$
$$p'_n(0)=f'(0)$$
$$\ldots.$$
$$p_n^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$$
$$p_n^{(n+1)}(0)\neq f^{(n+1)}(0).$$

Consideremos então um suporte (x_i,y_i), i=0,...,n, $x_i \neq x_j$ para $i\neq j$, e um polinómio dito **polinómio interpolador de Hermite**, $H_{2n+1}(x)$ verificando as 2(n+1) condições seguintes:

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i)$$
$$H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i)$$

Mostra-se que este polinómio de grau menor ou igual a 2n+1 existe e é único. Vejamos como construir H_{2n+1} de uma forma que generaliza o polinómio interpolador de Newton nas diferenças divididas. Consideremos os 2n+2 pontos

$$z_0,\ z_1, z_2,\ldots,z_{2n},\ z_{2n+1}$$

e o polinómio interpolador de Newton

$$\begin{aligned} p_{2n+1}(x) = {} & f(z_0) + (x-z_0)f[z_0,z_1] + (x-z_0)(x-z_1)f[z_0,z_1,z_2] + \\ & + \ldots + (x-z_0)(x-z_1)\ldots(x-z_{2n})f[z_0,z_1,\ldots,z_{2n+1}] \end{aligned} \tag{7}$$

Recorrendo ao artifício de considerar cada x_i igual a um par de z's consecutivos, supostos iguais, ou seja, fazendo

$$z_0=z_1=x_0$$

$$z_2=z_3=x_1$$

$$\ldots$$

$$z_{2n}=z_{2n+1}=x_n$$

então a fórmula (1) passa a escrever-se

$$p_{2n+1}(x)= f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_0]+(x-x_0)^2 f[x_0,x_0,x_1]+(x-x_0)^2(x-x_1)$$
$$f[x_0,x_0,x_1,x_1]++\ldots+(x-x_0)^2(x-x_1)^2\ldots(x-x_{n-1})^2(x-x_n)f[x_0,x_0,\ldots,x_n,x_n]$$
(8)

De facto, podemos generalizar a definição de diferenças divididas de modo a dar significado à fórmula anterior: assim,

$$f[x_i,x_i]=\underset{x\to x_i}{Lim} f[x,x_i]=\underset{x\to x_i}{Lim}\frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i}=f'(x_i)$$

$$f[x_0,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-f'(x_0)}{x_1-x_0},$$

$$f[x_0,x_0,x_1,x_1]=\frac{f[x_0,x_1,x_1]-f[x_0,x_0,x_1]}{x_1-x_0},\ldots$$

Doutro modo, o resultado obtido em (8) poderia obter-se fazendo o limite em (7) quando $z_0,z_1\to x_0$, $z_2,z_3\to x_1,\ldots$, $z_{2n},z_{2n+1}\to x_n$.

Para o polinómio cúbico de Hermite (n=2) as relações anteriores indicam que podemos estabelecer uma tabela com a seguinte configuração

x	f	1as. difs	2as. difs	3as. difs
x_i	f_i	f'_i	$f[x_i,x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_i,x_{i+1},x_{i+1}]$
x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+1}]$	
x_{i+1}	f_{i+1}	f'_{i+1}		
x_{i+1}	f_{i+1}			

Exemplo: Determinar um valor aproximado de ln(1.5) sabendo que

x	1	2
ln(x)	0	0.693147
$\frac{1}{x}$	1	0.5

Tem-se que

x	f	D	D^2	D^3
$x_0=1$	0	1=f '(1)	-0.306853	0.113706
$x_0=1$	0	0.693147	-0.193147	
$x_1=2$	0.693147	0.5=f '(2)		
$x_1=2$	0.693147			

Tendo-se que o polinómio de Hermite de grau três é:

$$H_3(x)=(x-1)-0.306853(x-1)^2+0.113706(x-1)^2(x-2)$$

7. Interpolação com Splines

Na secção anterior, foram utilizados polinómios de ordem n para interpolar entre os (n+1) pontos conhecidos. Por exemplo, com oito pontos pode-se construir um polinómio de grau sete. Este polinómio terá um comportamento que se adequará aos pontos conhecidos. No entanto, existem casos em que estas funções conduzem a resultados erróneos. Uma aproximação alternativa consiste em ajustar polinómios de ordem mais baixa a subconjuntos dos dados. Tais polinómios de ligação são chamados **funções splines**.

Polinómios de ordem superior pela sua regularidade tendem a não captar as alterações bruscas no comportamento da função, ao contrário dos splines. Assim, os splines conseguem uma melhor aproximação para as funções que tenham mudanças bruscas locais.

7.1. Splines Lineares

A ligação mais simples entre dois pontos é uma linha recta. O spline de primeira ordem, para um grupo de dados ordenados, pode ser definido como o conjunto de funções lineares:

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0), \quad x_0 \le x \le x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1), \quad x_1 \le x \le x_2$$

$$\ldots$$

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}), \quad x_{n-1} \le x \le x_n$$

onde m_i é o declive da recta que une os pontos

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Estas equações podem ser usadas para avaliar o valor da função em qualquer ponto entre x_0 e x_n, bastando para tal localizar o intervalo em que o ponto cai. De seguida, a equação apropriada é usada para determinar o valor da função nesse intervalo. Este método é muito idêntico à interpolação linear.

Uma das grandes desvantagens deste método reside no facto de ele não ser suave. No ponto onde dois splines se encontram (chamado <u>nó</u>), o declive muda abruptamente. Ou seja, a primeira derivada da função é descontínua nestes pontos. Esta desvantagem é superada utilizando splines de ordem superior que assegurem a suavidade nos nós e que entram com o valor da derivada nestes pontos.

7.2. Splines Quadráticos

Para garantir que as derivadas de ordem m sejam contínuas nos nós, têm de ser utilizados splines com ordem pelo menos m+1. Polinómios de terceira ordem ou splines cúbicos garantem a continuidade das derivadas de primeira e segunda ordem e são muito utilizados na prática.

Vamos ilustrar o conceito de interpolação com splines utilizando polinómios de segunda ordem. Estes "splines quadráticos" têm primeira derivada contínua nos nós. Embora splines quadráticos não garantam segundas derivadas iguais nos nós, servem para demonstrar o procedimento geral para desenvolver splines de ordens superiores.

O objectivo nos splines quadráticos é arranjar um polinómio de segunda ordem para cada intervalo entre valores. O polinómio para cada intervalo pode ser representado de um modo geral por

$$f_i(x)=a_i x^2+b_i x+c_i. \qquad i=1,...,n$$

Com n+1 pontos tem-se n intervalos e consequentemente 3n constantes desconhecidas. Como tal são necessárias 3n equações para calcular as constantes desconhecidas. Estas são:

1. O valor das funções tem que ser igual nos nós, i.é.,

$$f_i(x_i)= a_i x^2_i+b_i x_i+c_i=f(x_i)$$

$$f_{i+1}(x_i)=a_{i+1}x^2_i+b_{i+1}x_i+c_{i+1}=f(x_i) \qquad i=1,...,n-1$$

Como só os nós interiores são utilizados temos n-1+n-1=2n-2 condições.

2. A primeira e a última função têm que passar nos nós finais.

$$f_1(x_0)=a_1x^2_0+b_1x_0+c_1=f(x_0)$$

$$f_n(x_n)=a_nx^2_n+b_nx_n+c_n=f(x_n)$$

Temos então mais duas condições.

3. A primeira derivada nos nós interiores tem de ser igual.

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f_i'(x_i)=2a_ix_i+b_i= 2a_{i+1}x_i+b_{i+1}= f_{i+1}'(x_i) \quad i=1,...,n-1$$

Temos então mais n-1 condições.

Até agora temos 2n-2+2+n-1=3n-1 condições. Como temos 3n constantes desconhecidas temos que arranjar mais uma condição. Se não tivermos mais nenhuma informação adicional sobre as funções e as suas derivadas, temos que fazer uma escolha arbitrária para calcular as constantes. Apesar das escolhas que podem ser feitas serem inúmeras, por simplicidade:

4. Assumimos que a segunda derivada da primeira função é zero. Como $f_1''(x)=2a_1$ então $a_1=0$. Esta condição pode ser interpretada graficamente como, os dois primeiros pontos são ligados por uma linha recta.

<u>Exemplo</u>:

Ajustar um spline quadrático aos dados da tabela seguinte e usar o resultado para estimar o valor em x=5.

x	f(x)
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5

Temos n=3 intervalos, como tal vamos ter 3n=9 condições que são:

$$\begin{cases} 20.25a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1.0 \\ 20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1.0 \\ 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \\ 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5 \\ 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5 \\ 2 \times 4.5a_1 + b_1 = 2 \times 4.5a_2 + b_2 \\ 2 \times 7a_2 + b_2 = 2 \times 7a_3 + b_3 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Como a_1=0 o problema resume-se a resolver oito equações simultaneamente. Em forma de matriz temos:

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 20.25 & 4.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 49.0 & 7.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 49.0 & 7.0 & 1.0 \\ 3.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 81.0 & 9.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & -9.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 14.0 & 1.0 & 0.0 & -14.0 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema anterior obtém-se

a_1=0, b_1= -1, c_1=5.5, a_2=0.64, b_2= -6.76, c_2=18.46, a_3= -1.6, b_3=24.6, c_3= -91.3

Temos então os splines quadráticos: $f_1(x)=-x+5.5 \qquad 3.0 \leq x \leq 4.5$

$f_2(x)=0.64x^2-6.76x+18.46 \qquad 4.5 \leq x \leq 7.0$

$f_3(x)=-1.6x^2+24.6x-91.3 \qquad 7.0 \leq x \leq 9.0$

Temos então que $f_2(5)=0.64 \times 25-6.76 \times 5+18.46=0.66$.