Transformada de Laplace

Nas aulas anteriores foi visto que as ferramentas matemáticas de Fourier (série e transformadas) são de extrema importância na análise de sinais e de sistemas LIT.

Isto deve-se ao facto de que uma **vasta classe de sinais** pode ser representada como sendo a **combinação linear de exponenciais complexas periódicas** e de estas exponenciais serem **funções próprias** de sistemas LIT.

A transformada de Fourier fornece uma representação de sinais como uma combinação linear de exponenciais complexas periódicas na forma e^{st} onde $s = j\omega$, ou seja s é puramente imaginário.

No entanto a propriedade de e^{st} ser função própria mantém-se para valores arbitrários de s e não apenas para os puramente imaginários.

Transformada de Laplace

Assim, a transformada de Laplace não é mais do que uma **generalização da transformada de Fourier**.

As vantagens da transformada de Laplace sobre a trasformada de Fourier:

- fornece mais informação sobre sinais e sistemas que também podem ser analisados pela transformada de Fourier;
- pode ser aplicada em contextos em que a transformada de Fourier não pode – por exemplo na análise de sistemas instáveis.

Transformada de Laplace

A transformada inversa de Fourier era dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Esta expressão indica que um sinal pode ser representado como uma combinação linear de exponenciais complexas periódicas, e^{st} onde $s = j\omega$.

A transformada inversa de Laplace limita-se a generalizar este resultado para a forma:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\, e^{st} ds$$

Onde s é um complexo genérico: $s = \sigma + j\omega.$

A variável s deixou de ser imaginária pura para ser complexa com parte real.

Transformada de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

As exponenciais complexas, que foram as funções elementares com as quais construímos os sinais em Fourier, **deixam agora de ser exponenciais complexas periódicas**.

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

O factor $e^{j\omega t}$ foi já estudado e corresponde a uma exponencial complexa periódica. No entanto, ela está agora a ser pesada por uma exponencial real que lhe serve de módulo: $e^{\sigma t}$.

Transformada de Laplace

A expressão:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

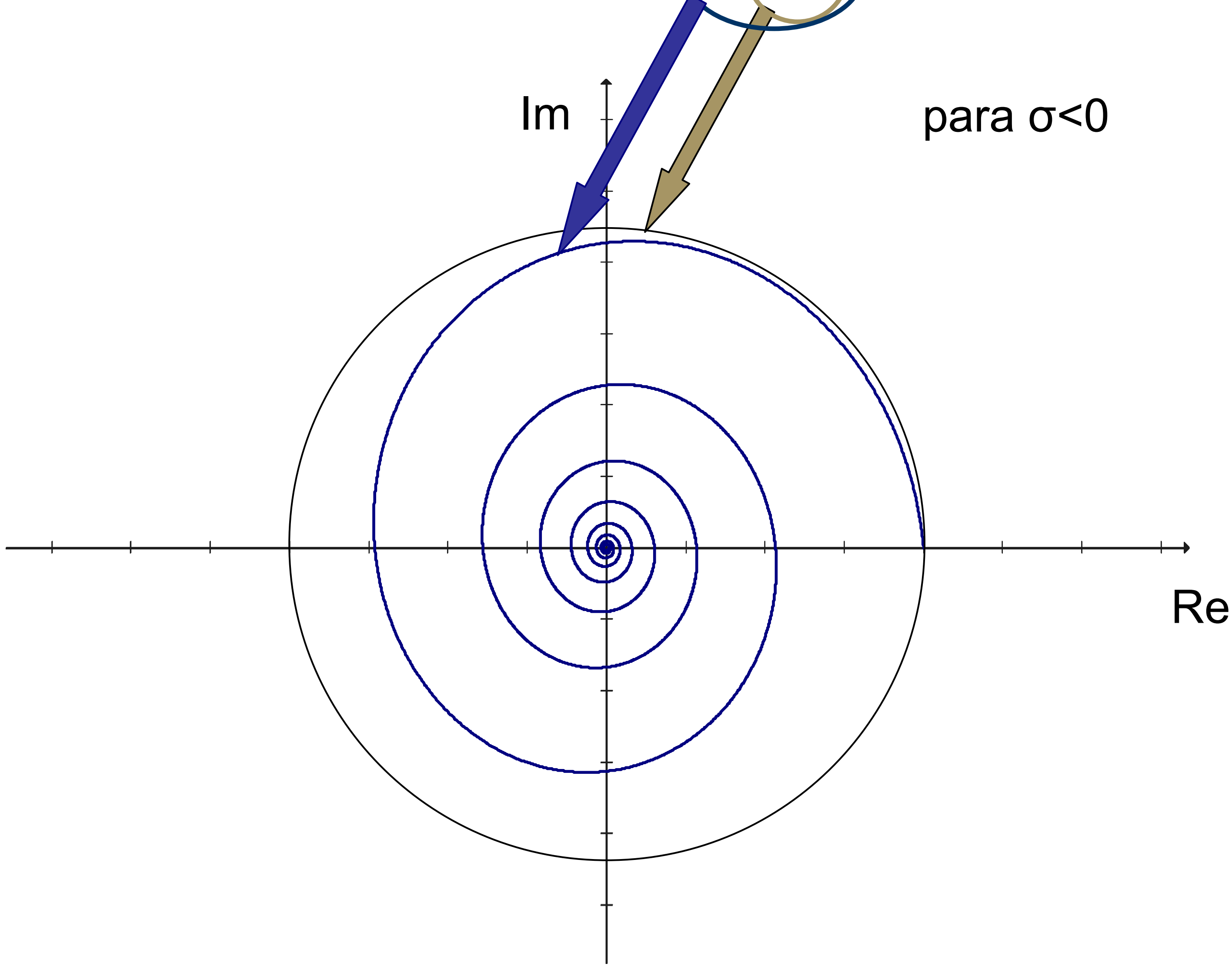
Indica que para sintetizar o sinal x(t) é necessário somar exponenciais complexas cada uma com um dado peso X(s).

Devemos portanto tentar perceber o que são estas exponenciais e **como se comportam no plano complexo** com a evolução do tempo.

O próximo slide ilustra esse comportamento, comparando-o com o comportamento de uma exponencial complexa periódica utilizada na transformada de Fourier.

Transformada de Laplace

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

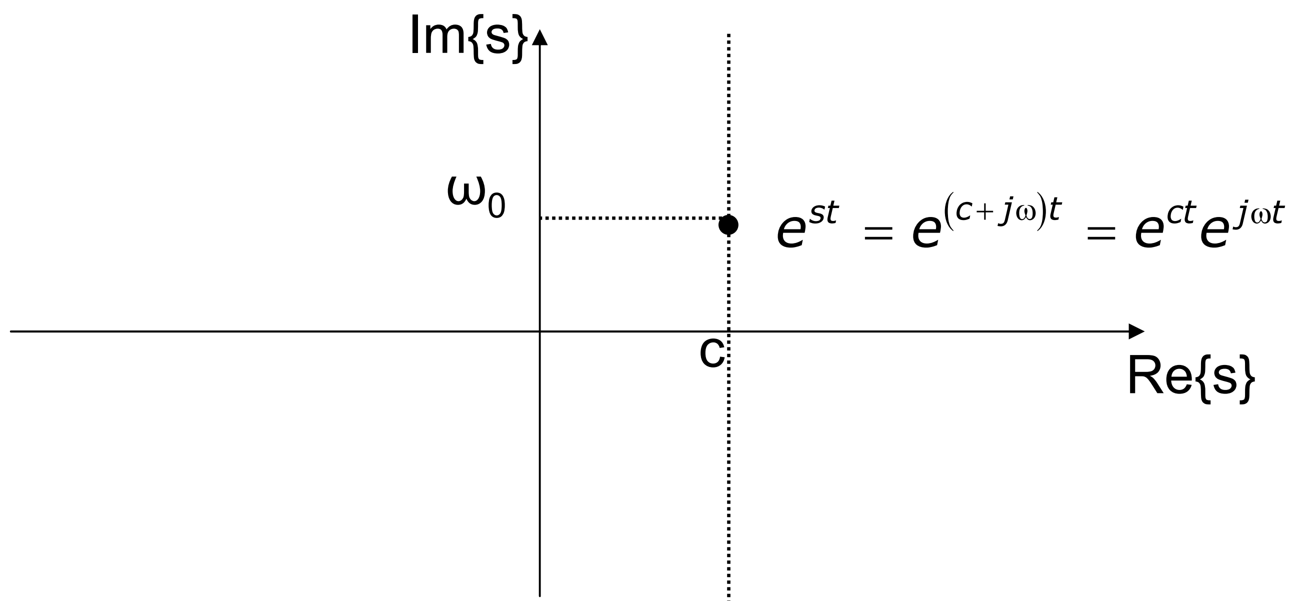


Transformada de Laplace

A expressão:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

indica ainda que a soma dessas exponenciais deve ser realizada num eixo vertical do plano complexo

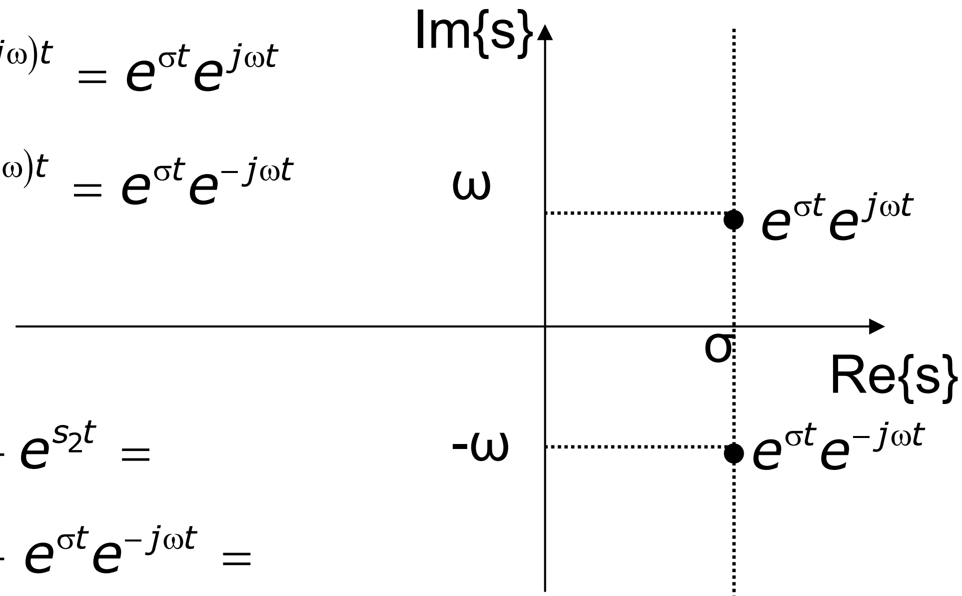


Transformada de Laplace

Verifiquemos em que resulta a soma de duas exponenciais complexas genéricas como complexo *s* de uma delas conjugado do da outra:

$$e^{s_1 t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

$$e^{s_2 t} = e^{(\sigma - j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{-j\omega t}$$



Somando estas expressões:

$$e^{s_1 t} + e^{s_2 t} =$$

$$e^{\sigma t} e^{j\omega t} + e^{\sigma t} e^{-j\omega t} =$$

$$e^{\sigma t}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) =$$

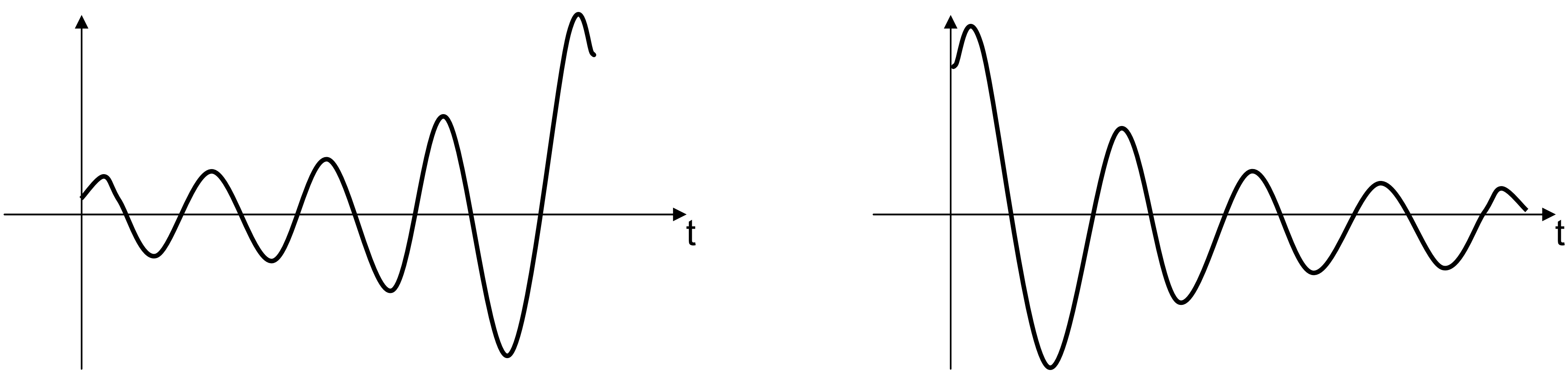
$$e^{\sigma t} 2\cos(\omega t)$$

Transformada de Laplace

A soma de duas exponenciais complexas de expoentes *st* conjugados resulta então em:

$$e^{\sigma t} 2\cos(\omega t)$$

Isto significa que enquanto a **transformada de Fourier** representava um sinal como sendo uma **soma de sinusóides**, a **transformada de Laplace** representa os sinais como sendo a **soma de sinusóides mas de amplitude exponencialmente variável**.



Transformada de Laplace

Um sinal pode ser representado como sendo a combinação linear de exponenciais complexas na forma:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

O peso *X(s)* de cada uma das exponenciais e^{st} na construção do sinal *x(t)* é dado por:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

A primeira expressão recebe a designação de **Transformada Inversa de Laplace**.

A segunda expressão recebe a designação de **Transformada (Directa) de Laplace**.

Propriedades da Transformada de Fourier de tempo discreto

Para que a relação entre o sinal no tempo e a sua transformada seja unívoca, os limites de integração na expressão da transformada:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

alteram-se para:

$$X(s) = \int_{0}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Sendo então esta a expressão da **transformada de Laplace unilateral**.

Para a transformada de Laplace unilateral existe apenas uma transformada inversa de *X(s)*. Desta forma não há necessidade de especificar a região de convergência explicitamente.

Transformada de Laplace inversa

A determinação da transformada inversa de Laplace recorrendo à definição:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Requer a integração no plano complexo.

É possível evitar essa operação por recurso a **tabelas de transformadas de Laplace**, onde os pares de transformadas de Laplace mais comuns estão já indicados.

Assim, a determinação de transformadas inversas será feita através de tabelas, bastando para isso exprimir o sinal em questão como uma combinação de funções mais simples cuja transformada está tabelada. Esta operação será vista nas aulas teórico-práticas.

Tabela de transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
6	$te^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}$
7	$t^n e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$
8a	$\cos bt\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
8b	$\sin bt\, u(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
9a	$e^{-at}\cos bt\, u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
9b	$e^{-at}\sin bt\, u(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
10a	$re^{-at}\cos(bt+\theta)\,u(t)$	$\frac{(r\cos\theta)s+(ar\cos\theta-br\sin\theta)}{s^2+2as+(a^2+b^2)}$
10b	$re^{-at}\cos(bt+\theta)\,u(t)$	$\frac{0.5re^{j\theta}}{s+a-jb}+\frac{0.5re^{-j\theta}}{s+a+jb}$
10c	$re^{-at}\cos(bt+\theta)\,u(t)$	$\frac{As+B}{s^2+2as+c}$
	$r=\sqrt{\frac{A^2c+B^2-2ABa}{c-a^2}},\ \theta=\tan^{-1}\frac{Aa-B}{A\sqrt{c-a^2}}$	
	$b=\sqrt{c-a^2}$	
10d	$e^{-at}\left[A\cos bt+\frac{B-Aa}{b}\sin bt\right]u(t)$	$\frac{As+B}{s^2+2as+c}$
	$b=\sqrt{c-a^2}$	

Propriedades da Transformada de Laplace

Linearidade:

Se

$$x_1(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X_1(s)$$

$$x_2(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X_2(s)$$

então

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \overset{L}{\leftrightarrow} a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$$

Onde a_1 e a_2 são coeficientes reais.

Propriedades da Transformada de Laplace

Escalonamento:

Se

$$x_1(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X_1(s)$$

Então, para *a > 0*:

$$x_1(at) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{a} X_1\left(\frac{s}{a}\right)$$

Compressão no tempo $\overset{L}{\leftrightarrow}$ Expansão na frequência

Expansão na tempo $\overset{L}{\leftrightarrow}$ Compressão na frequência

Note-se que *a* é restrito apenas a valores positivos porque se *x(t)* é um sinal causal, então *x(at)* seria anti-causal (existiria apenas para *t<0*) se *a<0*. Isto não é permitido na transformada unilateral de Laplace.

Propriedades da transformada de Laplace

Deslocamento temporal

Se

$$x_1(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X_1(s)$$

então

$$x_1(t-t_0) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X_1(s)\,e^{-st_0}$$

Esta propriedade enuncia que um sinal sofrer um atraso de t_0 segundos corresponde a multiplicar a sua transformada por e^{-st_0}.

Propriedades da transformada de Laplace

Deslocamento na frequência

Se

$$x_1(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X_1(s)$$

então

$$x_1(t)e^{s_o t} \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X_1(s - s_0)$$

Esta propriedade mostra claramente uma relação de dualidade entre o que ocorre no tempo e o que ocorre na frequência.

Propriedades da transformada de Laplace

Convolução no tempo e na frequência:

Se

$$x_1(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X_1(s)$$

$$x_2(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X_2(s)$$

então

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X_1(s)X_2(s) \quad \text{(Convolução no tempo)}$$

$$x_1(t)x_2(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi j}\left[X_1(s) * X_2(s)\right] \quad \text{(Convolução na frequência)}$$

Mais uma vez se nota uma relação de simetria ou dualidade entre as duas propriedades.

Propriedades da transformada de Laplace

A propriedade da convolução no tempo da transformada de Laplace é extremamente importante pois simplifica o estudo dos sinais de saída devidos a uma dada entrada num sistema LIT.

Sendo a propriedade da convolução no tempo dada por:

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X_1(s)X_2(s)$$

E sendo a resposta a estado-nulo de um sistema dada por:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Então, este cálculo poderá ser realizado no domínio de Laplace sem necessidade de utilizar a convolução:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad Y(s) = X(s)H(s)$$

Propriedades da transformada de Laplace

Assim, um método possível para o cálculo da **resposta a estado-nulo** passa a ser o seguinte:

Tendo já o sinal de entrada e a resposta a impulso do sistema em causa:

$$x(t) \quad \text{e} \quad h(t)$$

Calcula-se a transformada de Laplace de cada um deles:

$$x(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X(s)$$

$$h(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad H(s)$$

Bastando multiplicá-las para determinar a transformada da resposta a estado-nulo.

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

A expressão da resposta a estado-nulo no tempo obtém-se por transformação inversa de Y(s) (recorrendo a tabelas).

$$Y(s) \quad \overset{L^{-1}}{\rightarrow} \quad y(t)$$

Propriedades da transformada de Laplace

Diferenciação temporal:

Se $$x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s)$$

então $$\frac{dx(t)}{dt} \overset{L}{\leftrightarrow} sX(s) - x(0^-)$$

A aplicação repetida desta propriedade conduz a:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{L}{\leftrightarrow} s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

E para uma diferenciação de ordem *n*:

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \overset{L}{\leftrightarrow} s^nX(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}\dot{x}(0^-) - \ldots - \overset{(n-1)}{x}(0^-)$$

onde $\overset{(r)}{x}(0^-)$ é $\frac{d^rx(t)}{dt^r}$ em $t=0^-$.

Solução de equações integro-diferenciais recorrendo à transformada de Laplace

Dado que:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad s^n Y(s) + \ldots$$

A transformada de Laplace de uma equação diferencial é uma equação algébrica que pode ser resolvida em ordem a Y(s).

O exemplo seguinte demonstra o procedimento para resolver equações diferenciais lineares de coeficientes constantes por recurso à transformada de Laplace.

Exemplo de utilização da transformada de Laplace

Resolva a equação diferencial de segunda ordem seguinte:

$$\left(D^2+5D+6\right)y(t)=(D+1)x(t)$$

Se as condições iniciais são: $y\left(0^-\right)=2\ ,\quad \dot{y}\left(0^-\right)=1$

e a entrada: $x(t)=e^{-4t}u(t)$

A equação diferencial no operador *d/dt* é:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

Sendo:

$$y(t)\quad \overset{L}{\leftrightarrow}\quad Y(s)$$

Pela propriedade da derivação no tempo:

$$\frac{dy(t)}{dt}\quad \overset{L}{\leftrightarrow}\quad sY(s)-y\left(0^-\right)=sY(s)-2$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}\quad \overset{L}{\leftrightarrow}\quad s^2Y(s)-sy\left(0^-\right)-\dot{y}\left(0^-\right)=s^2Y(s)-2s-1$$

Exemplo de utilização da transformada de Laplace

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Transformada de Laplace da equação diferencial

$$s^2Y(s) - 2s - 1$$???

$$5\left[sY(s) - 2\right]$$???

$$6Y(s)$$

Falta portanto determinar a transformada do segundo membro da equação diferencial que descreve o comportamento do sistema.

Exemplo de utilização da transformada de Laplace

A transformada de *x(t)* é dada por:

$$x(t) = e^{-4t}u(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X(s) = \frac{1}{s+4}$$

Este resultado é determinado por recurso a tabelas de transformadas ou

4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
6	$te^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}$

por transformação analítica: $$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-4t}u(t)\right] e^{-st} dt$$

Quanto à derivada de primeira ordem do sinal de entrada, tem como transformada:

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad sX(s) - x\left(0^-\right) = s\frac{1}{s+4} - 0 = \frac{s}{s+4}$$

Exemplo de utilização da transformada de Laplace

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Transformada de Laplace da equação diferencial

$$s^2Y(s) - 2s - 1$$

$$5\left[sY(s) - 2\right]$$

$$6Y(s)$$

$$\frac{1}{s+4}$$

$$\frac{s}{s+4}$$

Assim, a transformada de Laplace de toda a equação diferencial assume a forma:

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5\left[sY(s) - 2\right] + 6Y(s) = \frac{s}{s+4} + \frac{1}{s+4}$$

Exemplo de utilização da transformada de Laplace

Reunindo todos os termos em Y(s) no primeiro membro e todos os outros no segundo, obtém-se:

$$\left(s^2+5s+6\right)Y(s)=\left(2s+11\right)+\frac{s+1}{s+4}\Leftrightarrow$$

$$\left(s^2+5s+6\right)Y(s)=\frac{2s^2+20s+45}{s+4}\Leftrightarrow$$

$$Y(s)=\frac{2s^2+20s+45}{(s+4)\left(s^2+5s+6\right)}\Leftrightarrow$$

$$Y(s)=\frac{2s^2+20s+45}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

y(t) é determinado pela transformada inversa de Y(s).

Expandindo o segundo membro em fracções parciais:

5	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$

$$Y(s)=\frac{13/2}{s+2}-\frac{3}{s+3}-\frac{3/2}{s+4}$$

e pela transformada inversa, a resposta total do sistema:

$$y(t)=\left(\tfrac{13}{2}e^{-2t}-3e^{-3t}-\tfrac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)$$

Componentes de entrada-nula e de estado-nulo da resposta

O método da transformada de Laplace utilizado no exemplo anterior **permite determinar a resposta total** que inclui as componentes de entrada-nula e de estado-nulo.

É no entanto possível ao longo do processo de determinação da resposta total separar as duas componentes.

No exemplo anterior os termos que surgem devido às condições iniciais $y\left(0^{-}\right)=2$ e $\dot{y}\left(0^{-}\right)=1$ formam a resposta a entrada-nula.

Os restantes termos corresponderão à componente de estado-nulo.

Componentes de entrada-nula e de estado-nulo da resposta

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \overset{L}{\leftrightarrow} s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 1$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \overset{L}{\leftrightarrow} sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1$$

$$5\left[sY(s) - 2\right]$$

$$6Y(s)$$

$$\frac{1}{s+4}$$

$$\frac{s}{s+4}$$

Parcelas relativas a condições iniciais:

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5\left[sY(s) - 2\right] + 6Y(s) = \frac{s}{s+4} + \frac{1}{s+4}$$

Componentes de entrada-nula e de estado-nulo da resposta

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5\left[sY(s) - 2\right] + 6Y(s) = \frac{s}{s+4} + \frac{1}{s+4}$$

$$\left(s^2 + 5s + 6\right)Y(s) = \underbrace{(2s + 11)}_{\text{Termos relativos a condições iniciais}} + \underbrace{\frac{s+1}{s+4}}_{\text{Termos relativos ao sinal de entrada}}$$

Mantendo estas parcelas separadas na determinação da transformada da resposta Y(s):

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(2s+11)}{\left(s^2+5s+6\right)}}_{\text{Componente de entrada-nula}} + \underbrace{\frac{s+1}{(s+4)\left(s^2+5s+6\right)}}_{\text{Componente de estado-nulo}}$$

Determinando a transformada inversa de cada parcela:

$$y(t) = \underbrace{\left(7e^{-2t} - 5e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{Resposta a entrada-nula}} + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \tfrac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)}_{\text{Resposta a estado-nulo}}$$

Questões??

Resposta a estado-nulo: função de transferência de um sistema LITC

Considere-se um sistema de ordem *n* especificado pela equação:

$$Q(D).y(t) = P(D).x(t)$$

ou de outra forma:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)y(t) = (b_N D^N + b_{N-1}D^{N-1} + \ldots + b_1 D + b_0)x(t)$$

A resposta a estado-nulo por definição é a resposta de um sistema a uma entrada quando o sistema tem condições iniciais nulas.

Assim, y(t) satisfaz a equação de sistema anterior com condições iniciais nulas tais que:

$$y\left(0^-\right) = 0 \quad \dot{y}\left(0^-\right) = 0 \quad \ddot{y}\left(0^-\right) = 0 \ \cdots \quad y^{(n-1)}\left(0^-\right) = 0$$

Resposta a estado-nulo: função de transferência de um sistema LITC

A transformada das derivadas de várias ordens de x(t) e y(t) são:

$$\frac{d^r x(t)}{dt^r} \overset{L}{\leftrightarrow} s^r X(s) - s^{r-1}x(0^-) - s^{r-2}\dot{x}(0^-) - \ldots - \overset{(r-1)}{x}(0^-)$$

$$\frac{d^r y(t)}{dt^r} \overset{L}{\leftrightarrow} s^r Y(s) - s^{r-1}y(0^-) - s^{r-2}\dot{y}(0^-) - \ldots - \overset{(r-1)}{y}(0^-)$$

Devido às condições iniciais nulas: $y(0^-) = 0 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(0^-) = 0$

A entrada x(t) é causal pelo que: $x(0^-) = 0 \ \ldots \ x^{(n-1)}(0^-) = 0$

Então:

$$\frac{d^r y(t)}{dt^r} \overset{L}{\leftrightarrow} s^r Y(s) \qquad\qquad \frac{d^r x(t)}{dt^r} \overset{L}{\leftrightarrow} s^r X(s)$$

Conclui-se então que a transformada de Laplace da equação:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)y(t) = (b_N D^N + b_{N-1}D^{N-1} + \ldots + b_1 D + b_0)x(t)$$

será:

$$\left(s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right)Y(s) = (b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \ldots + b_1 s + b_0)X(s)$$

Resposta a estado-nulo: função de transferência de um sistema LITC

$$\underbrace{\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)}_{Q(D)} y(t) = \underbrace{\left(b_N D^N + b_{N-1}D^{N-1} + \ldots + b_1 D + b_0\right)}_{P(D)} x(t)$$

$$\Big\updownarrow \mathrm{L}$$

$$\overbrace{\left(s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right)}^{Q(s)} Y(s) = \overbrace{\left(b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right)}^{P(s)} X(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0} X(s)$$

Note-se que o polinómio em *s* que está em numerador não é mais do que o polinómio *P(D)* com o operador *D* subsituído pela variável *s*. Ou seja, este polinómio pode ser designado por *P(s)*.

De forma semelhante pode notar-se que o polinómio em denominador se pode designar por *Q(s)*. Então:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} X(s)$$

Resposta a estado-nulo: função de transferência de um sistema LITC

É comum definir a **função de transferência de um sistema**, como sendo *H(s)*, a razão entre *Y(s)* e *X(s)* quando todas as condições iniciais são nulas.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{L\{\text{resposta a estado-nulo}\}}{L\{\text{sinal de entrada}\}}$$

Dado que, como já vimos:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} X(s)$$

Então, a função de transferência de um sistema é dado por:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \text{tendo-se} \qquad Y(s) = H(s)X(s)$$

Note-se que da descrição de um sistema através de uma equação diferencial se retiram imediatamente os polinómios *P(D)* e *Q(D)*. Assim, a função de transferência de um sistema é extremamente simples de determinar.

Resposta a estado-nulo: função de transferência de um sistema LITC

Pode então representar-se a versão transformada (para o domínio de Laplace) do sistema da forma ilustrada a seguir:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\;H(s)\;} \longrightarrow Y(s) = H(s)X(s)$$

onde

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

A entrada *X(s)* é a transformada de Laplace do sinal de entrada no tempo *x(t)* e a saída *Y(s)* é a transformada de Laplace da saída no tempo *y(t)*.

O sistema é descrito pela função de transferência *H(s).*

Resposta a estado-nulo: função de transferência de um sistema LITC

Note-se que tinha já sido visto que, dado que no tempo o sinal de saída de um sistema se determina a partir da expressão:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Então pela propriedade da convolução no tempo, este cáculo passaria a ser realizado através de uma multiplicação no domínio de Laplace:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad Y(s) = X(s)H(s)$$

Conclui-se então que **a função de transferência de um sistema não é mais do que a transformada de Laplace da resposta a impulso desse sistema**.

A função de transferência de um sistema pode então ser calculada através de:

$$h(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad H(s)$$

ou

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Estabil Estabiliade de um sistema em função da localização dos pólos da função de transferência idade de um sistema

Observe-se que o denominador da função de transferência *H(s)*:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

é *Q(s),* o polinómio característico do sistema na variável *s*.

Assim sendo, **os pólos de *H(s)*** (zeros do denominador) **são coincidentes com as raízes características do sistema**.

Consequentemente o critério de estabilidade de um sistema pode ser enunciado em termos dos pólos da função de transferência de um sistema.

Estabiliade de um sistema em função da localização dos pólos da função de transferência

Um sistema LITC é **estável** se e só se todos os pólos da sua função de transferência *H(s)* se localizam no semi-plano complexo esquerdo.

Um sistema LITC será **instável** se e só uma ou ambas das seguintes condições se verificarem:

- Pelo menos um dos pólos de *H(s)* se localiza no semi-plano complexo direito;
- Existem pólos repetidos de *H(s)* no eixo imaginário;

Um sistema LITC será **marginalmente estável** se e só não existem pólos no semiplano complexo direito e existem pólos simples no eixo imaginário.

Análise de circuitos eléctricos: método do circuito transformado

Utilizando os conceitos de transformada de Laplace, é possível analisar circuitos eléctricos sem escrever equações integro-diferenciais.

Este procedimento é consideravelmente mais simples pois permite **tratar um circuito eléctrico (com condensadores e bobinas) como se se tratasse de um circuito resistivo**.

Para isso é necessário representar o circuito no domínio de Laplace, onde todas as tensões e correntes são representadas pela sua transformada de Laplace.

Análise de circuitos eléctricos: método do circuito transformado

Para uma indutância L, a relação entre a corrente que a percorre e a tensão aos seus terminais é dada por:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad \frac{dx(t)}{dt} \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad sX(s) - x(0^-)$$

Se transformarmos esta expressão para o domínio de Laplace obtém-se:

$$V(s) = L\left[sI(s) - i(0^-)\right]$$

assumindo uma corrente inicial nula:

$$V(s) = LsI(s)$$

Análise de circuitos eléctricos: método do circuito transformado

Similarmente para um condensador de capacidade C, a relação tensão/corrente é:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad \frac{dx(t)}{dt} \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad sX(s) - x(0^-)$$

Se transformarmos esta expressão para o domínio de Laplace obtém-se:

$$I(s) = C\left[sV(s) - v(0^-)\right]$$

assumindo uma teñsão inicial nula:

$$I(s) = CsV(s) \Leftrightarrow$$
$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

Análise de circuitos eléctricos: método do circuito transformado

Assim, no domínio de Laplace, a relação tensão/corrente de uma indutância e de um condensador são algébricas.

$$V_L(s) = Ls\,I(s) \qquad\qquad V_C(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

Notando que para uma resistência, a relação no tempo é dada por:

$$v_R(t) = Ri(t) \quad \xrightarrow{L} \quad V_R(s) = RI(s)$$

verifica-se que a indutância e o condensador se comportam como 'resistências' de valor:

$$Z_L(s) = Ls \qquad\qquad Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$$

Estas grandezas dos componentes são designadas de **impedâncias** e sendo determinadas pela razão V(s)/I(s) para cada elemento (mediante condições iniciais nulas).

Análise de circuitos eléctricos: método do circuito transformado

As equações de um sistema eléctrico (das malha ou dos nós), vulgarmente diferenciais, convertem-se assim em equações algébricas.

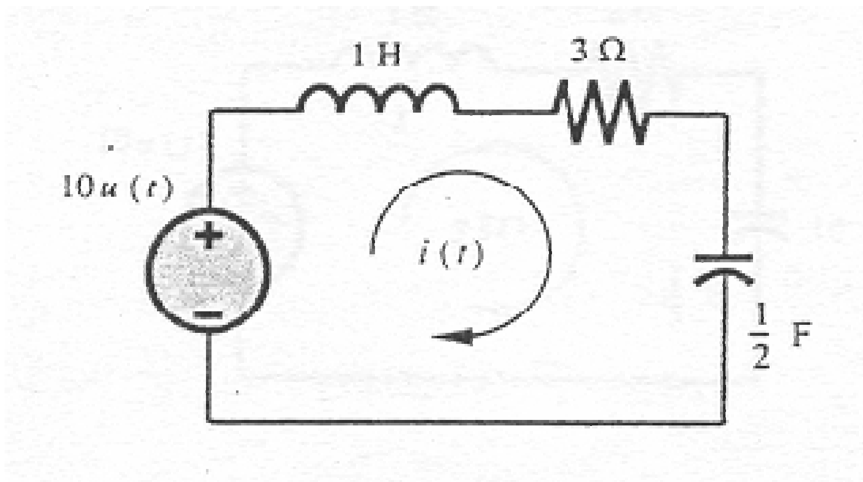
Para além disso todas as técnicas de simplificação utilizadas para circuitos resistivos:

- Resistência série equivalente;
- Resistência paralela equivalente;
- Divisor de corrente;
- Divisor de tensão;
- Teorema de Thévenin;
- Teorema de Norton;

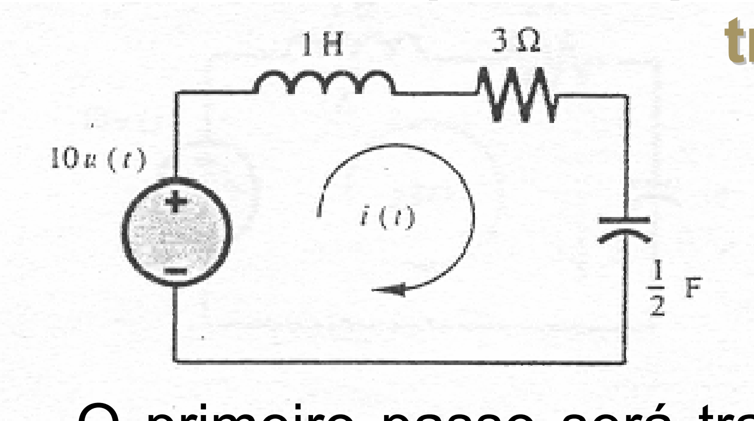
podem ser aplicadas a redes eléctricas gerais transformadas para o domínio de Laplace.

Exemplo de aplicação do método do circuito transformado

Determine a corrente de malha do circuito seguinte, *i(t)*, assumindo que todas as condições iniciais são nulas.



Exemplo de aplicação do método do circuito transformado



O primeiro passo será transformar todo o circuito para o domínio de Laplace:

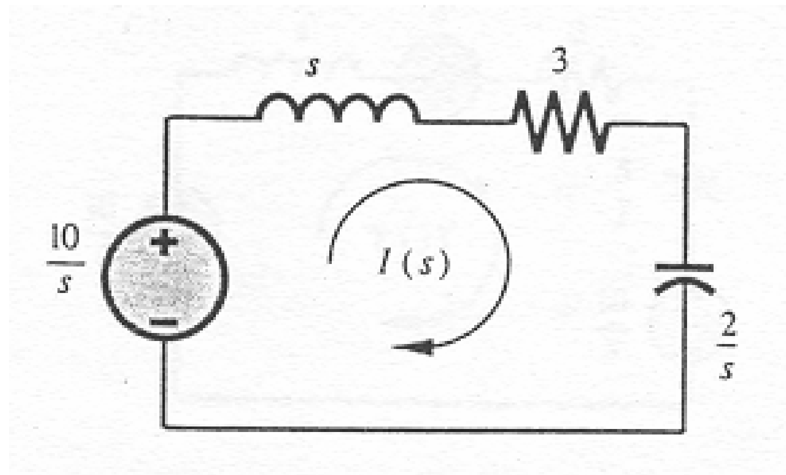
Fontes: $$x(t) = 10u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s) = \frac{10}{s}$$

Componentes:

$$R \overset{L}{\leftrightarrow} R$$

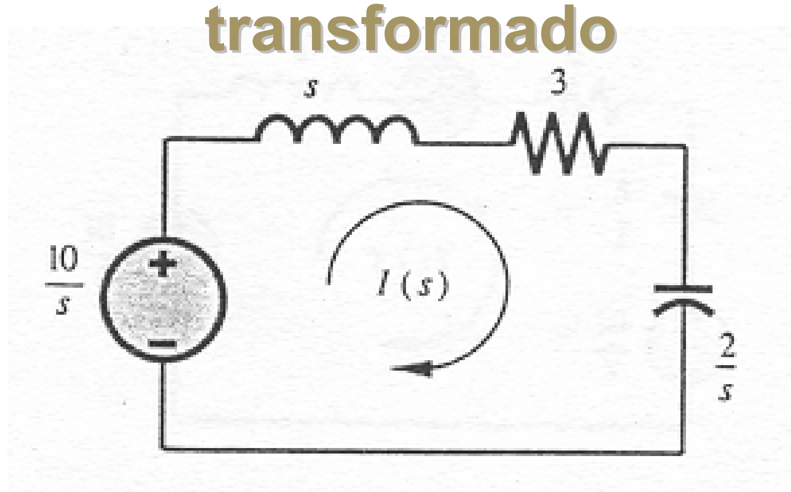
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \overset{L}{\leftrightarrow} V(s) = LsI(s)$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \overset{L}{\leftrightarrow} V(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$



Outras grandezas: $i(t) \overset{L}{\leftrightarrow} I(s)$

Exemplo de aplicação do método do circuito transformado



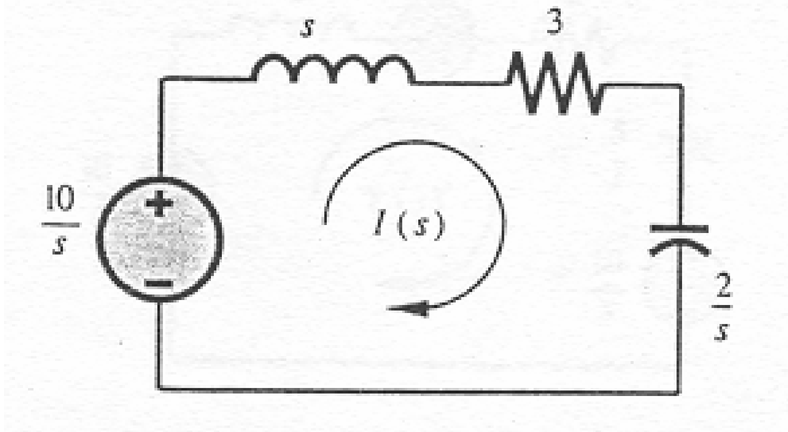
No domínio de Laplace as relações entre tensões e correntes passam a ser lineares (deixam de existir derivações).

A abordagem para determinar a corrente *I(s)* pode então ser a mesma que se utilizaria caso o circuito fosse totalmente resistivo.

Podemos então calcular a impedância total da malha:

$$Z(s) = s + 3 + \frac{2}{s} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s}$$

Exemplo de aplicação do método do circuito transformado



Impedância total:

$$Z(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s}$$

A tensão que alimenta a malha é no domínio de Laplace:

$$V(s) = \frac{10}{s}$$

A corrente que flui no circuito será naturalmente a teñsão que o alimenta sobre a impedância total:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{10}{s}}{\frac{s^2 + 3s + 2}{s}} = \frac{10}{s^2 + 3s + 2} = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+2}$$

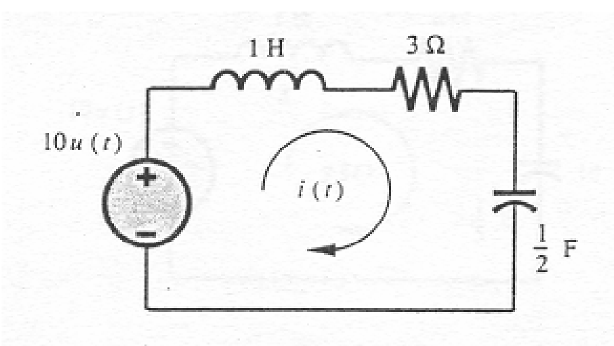
Exemplo de aplicação do método do circuito transformado

A tensão que alimenta a malha é no domínio de Laplace:

$$I(s) = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+2}$$

A expressão pretendida da corrente que flui no circuito (no domínio do tempo) será agora determinada por uma simples operação de transformação inversa do resultado anterior. Esta operação é realizada por recurso a tabelas de transformadas:

5	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$



$$i(t) = 10\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u\left(t\right)$$