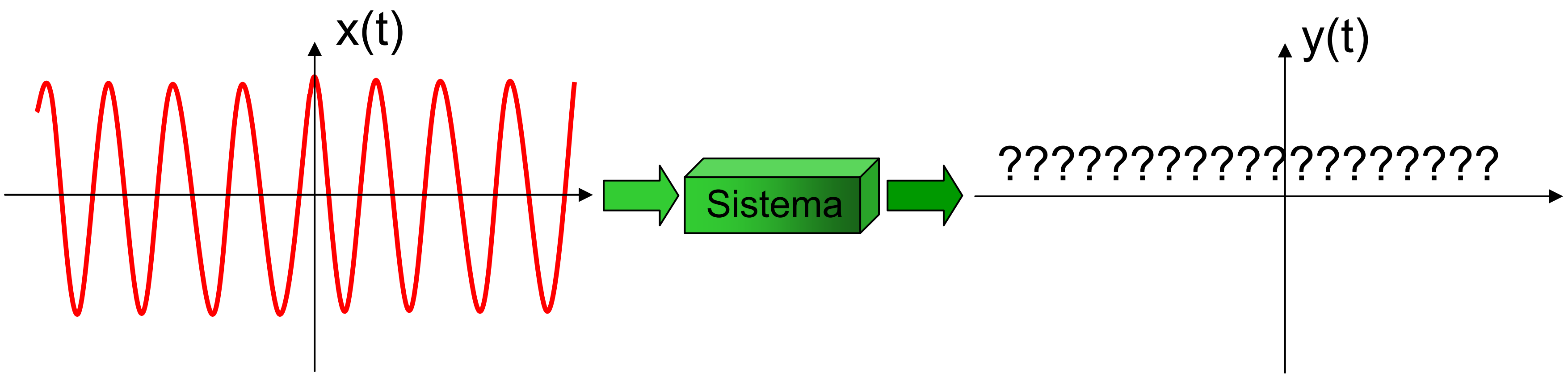
Análise de sistemas no domínio da frequência

Quando se analisa um sistema no **domínio da frequência**, pretende-se essencialmente conhecer o seu comportamento no que respeita a responder a sinais periódicos, que têm uma frequência associada.



É de prever que se faça uma análise dos sistemas recorrendo a entradas cuja expressão analítica seja um seno ou um coseno:

$$x(t) = \sin(\omega t + \theta) \quad \text{ou} \quad x(t) = \cos(\omega t + \theta)$$

No entanto, esta escolha implicaria um aumento na complexidade analítica.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\omega\tau + \theta\right)h(t-\tau)d\tau$$

Note-se desde já que há uma relação muito próxima entre as funções periódicas que são mais comuns (senos e cosenos) e as exponenciais complexas:

$$e^{j\theta} = \cos\left(\theta\right) + j\sin\left(\theta\right)$$

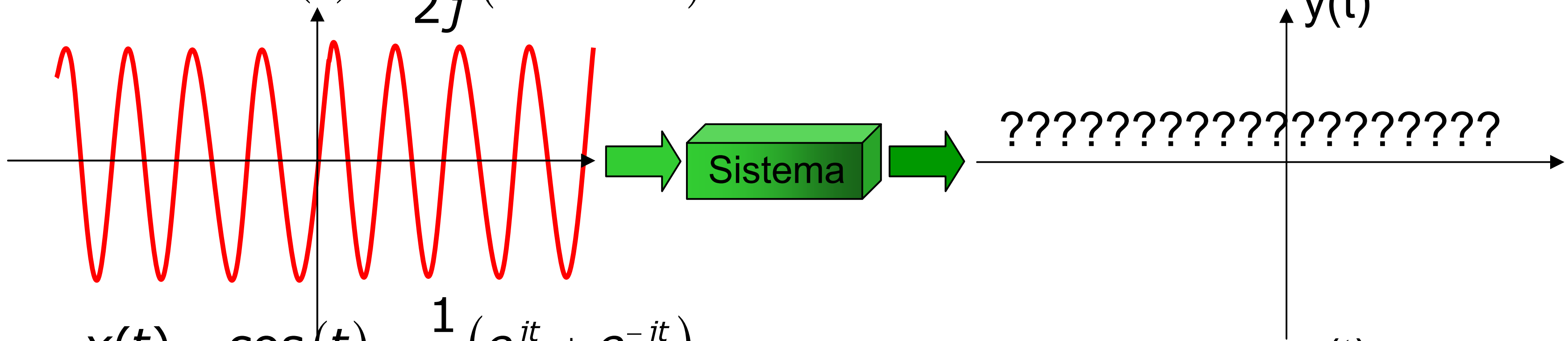
$$\cos\left(\theta\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

$$\sin\left(\theta\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

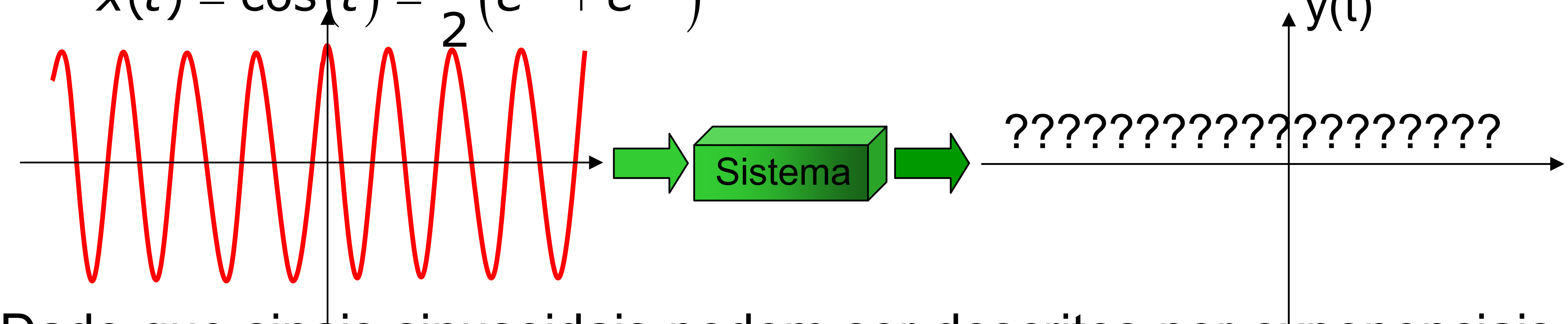
A utilização de exponenciais simplifica o tratamento matemático dos sistemas quando têm na sua entrada sinais periódicos.

Apesar de serem inicialmente menos intuitivas que funções como senos e cosenos, a sua utilização revela-se vantajosa.

$$x(t) = \sin(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)$$

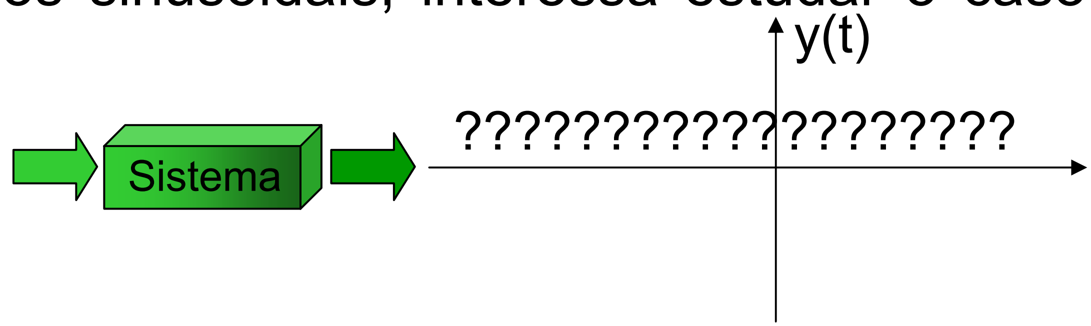


$$x(t) = \cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right)$$



Dado que sinais sinusoidais podem ser descritos por exponenciais complexas, o que implica que as exponenciais complexas são sinais mais básicos que os sinusoidais, interessa estudar o caso seguinte:

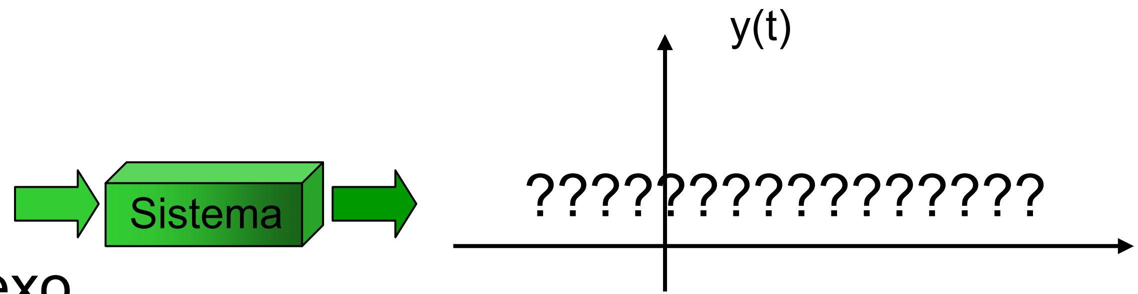
$$x(t) = e^{jt}$$



Resposta de um sistema LITC a uma exponencial complexa

Vejamos então o que sucede quando se injecta um sinal exponencial complexo num sistema LITC:

$$x(t) = e^{st}$$



onde s é complexo

A resposta de um sistema a um sinal de entrada é dada por:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \Leftrightarrow$$

Comutatividade da convolução

Resposta de um sistema LITC a uma exponencial complexa

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \Leftrightarrow$$

$$x(t) = e^{st}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{st} e^{-s\tau}\, d\tau \Leftrightarrow$$

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \Leftrightarrow$$

$$y(t) = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{H(s)} \Leftrightarrow$$

$$y(t) = H(s)\, e^{st}$$

$x(t) = e^{st}$

onde s é complexo

$y(t) = H(s)\, e^{st}$

Resposta de um sistema LITC a uma exponencial complexa

Então, quando num sistema LITC se injecta uma exponencial complexa o resultado é a mesma exponencial complexa pesada por um valor que depende da entrada.

$$x(t) = e^{st} \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y(t) = \boxed{H(s)}\, e^{st}$$

A exponencial injectada faz parte da saída

Mas com uma amplitude diferente da entrada.

A função e^{st} tem como resposta num sistema LITC uma função igual e^{st} apenas com um peso diferente (dependente do valor s).

Por esse facto, a função e^{st} designa-se de **função própria** do sistema.

O valor H(s) designa-se **valor próprio** do sistema.

Resposta de um sistema LITC a uma soma de exponenciais complexas

Pelo resultado anterior e pela linearidade dos sistemas LITC:

$$x_1(t) = a_1 e^{s_1 t} \quad \Rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \Rightarrow \quad y_1(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$

$$x_2(t) = a_2 e^{s_2 t} \quad \Rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \Rightarrow \quad y_2(t) = a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$x_3(t) = a_3 e^{s_3 t} \quad \Rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \Rightarrow \quad y_3(t) = a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

Se considerarmos um sinal de entrada que seja a soma pesada de diversas exponenciais complexas:

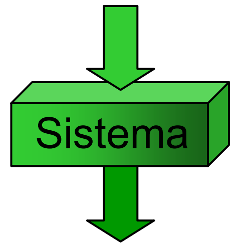
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

Pela linearidade do sistema:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

Resposta de um sistema LITC a uma soma de exponenciais complexas

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

Generalizando para uma qualquer combinação linear de exponenciais discretas:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

onde $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$

Note-se que se se conseguir representar um sinal como sendo a soma de exponenciais complexas, a resposta do sistema é imediatamente composta pelas mesmas exponenciais complexas com um peso $H(s_k)$.

Série de Fourier

Verifica-se então que é importante estudar sinais que possam ser interpretados como **combinações de exponenciais complexas**.

Considere-se a exponencial complexa periódica:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Existe um conjunto de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente com esta, ou seja, com frequência múltipla de ω_0:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Cada uma destas exponenciais é periódica de período T, apesar do seu período fundamental ser uma fracção inteira de T.

Assim, uma combinação linear destas exponenciais gerará também um sinal periódico de período T:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

A representação de um sinal pela expressão anterior designa-se por representação em **série de Fourier**.

Série de Fourier

Somando algumas exponenciais complexas de frequência angular múltipla de uma fundamental:

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}+\frac{3}{2}e^{j4\pi t}+\frac{3}{2}e^{-j4\pi t}+6e^{j6\pi t}+6e^{-j6\pi t}+\frac{5}{2}e^{j8\pi t}+\frac{5}{2}e^{-j8\pi t}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}\right)}+3\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)}+12\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t}\right)}+5\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{j8\pi t}+e^{-j8\pi t}\right)}$$

Regra de Euler $\cos(\theta)=\frac{1}{2}\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)$

$$x(t)=\cos(2\pi t)+3\cos(4\pi t)+12\cos(6\pi t)+5\cos(8\pi t)$$

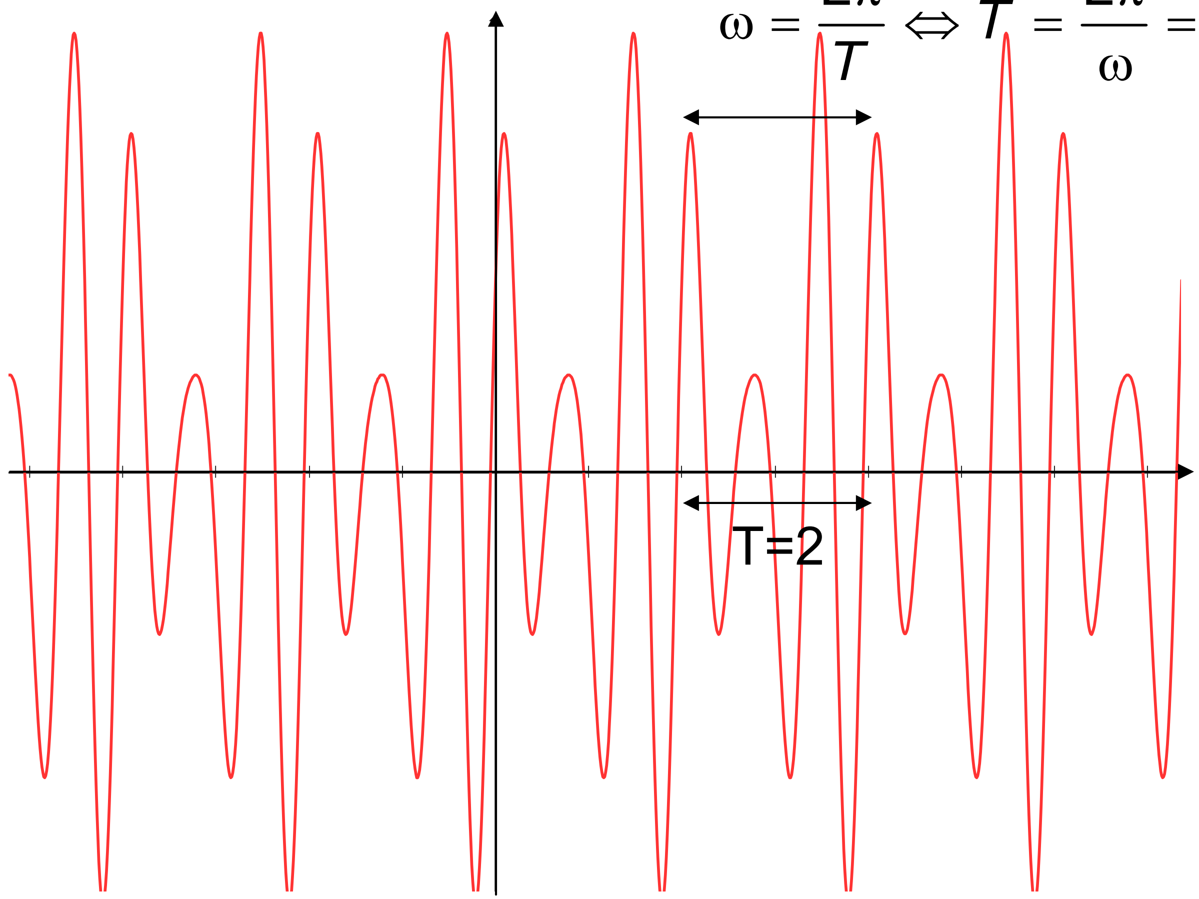
e obtemos um sinal que é a soma de sinusóides de frequências angulares múltiplas.

Mesmo que estas sinusóides tenham fase inicial não nula:

$$x(t)=\cos(2\pi t)+3\cos(4\pi t+10)+12\cos(6\pi t-20)+5\cos(8\pi t+50)$$

Todas as frequências neste sinal são múltiplas de π, pelo que essa será a frequência fundamental, sendo o período 2:

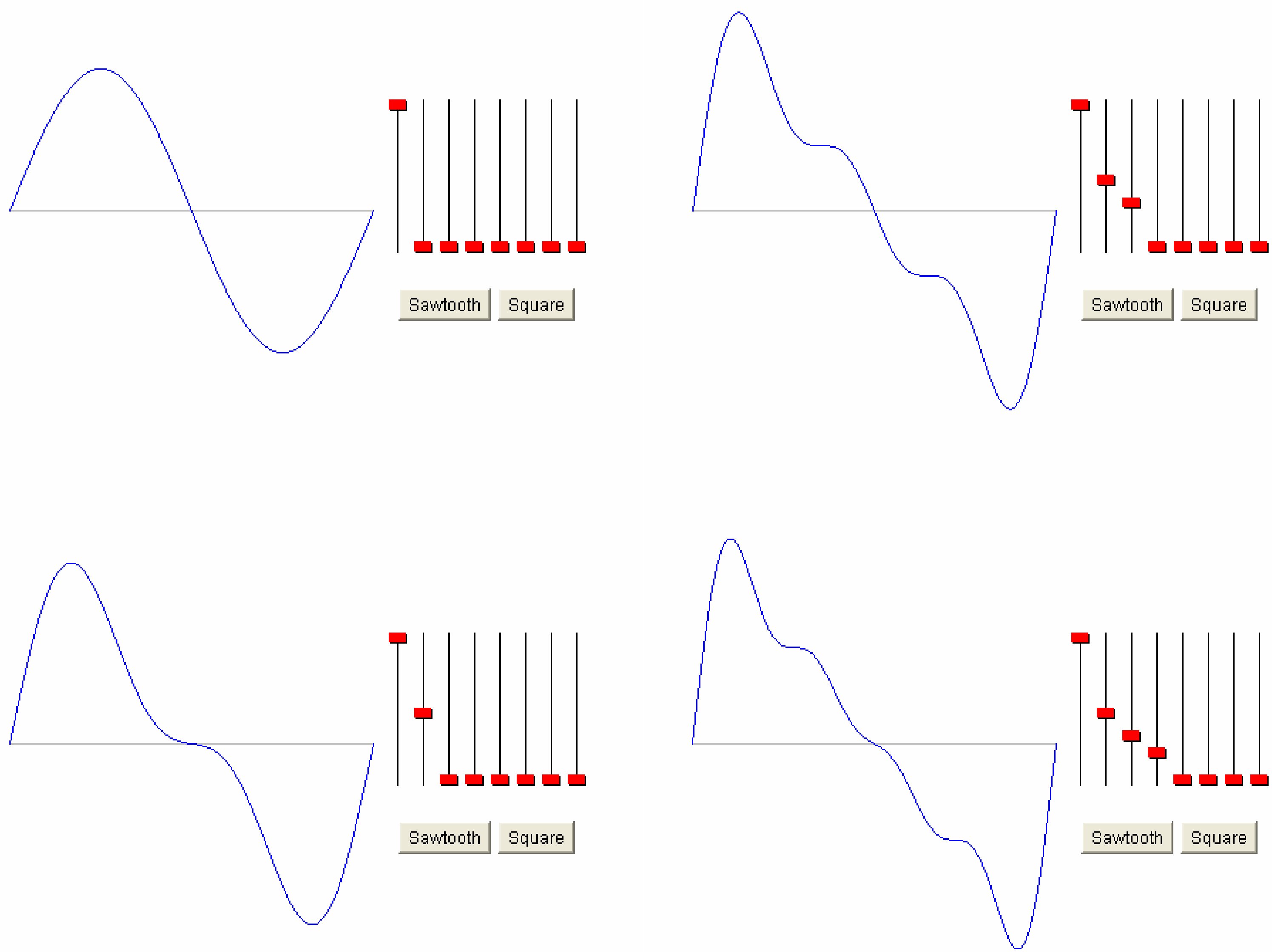
$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Leftrightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

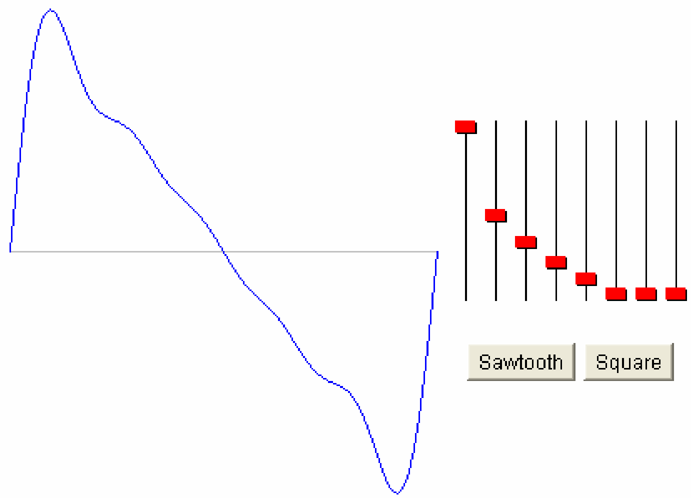


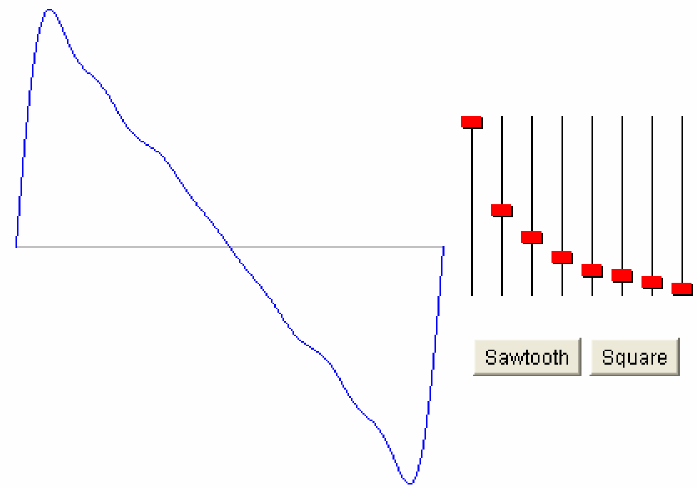
Exemplos de aplicações que sintetizam sinais periódicos a partir de sinais elementares (sinusóides = soma de exponenciais complexas)

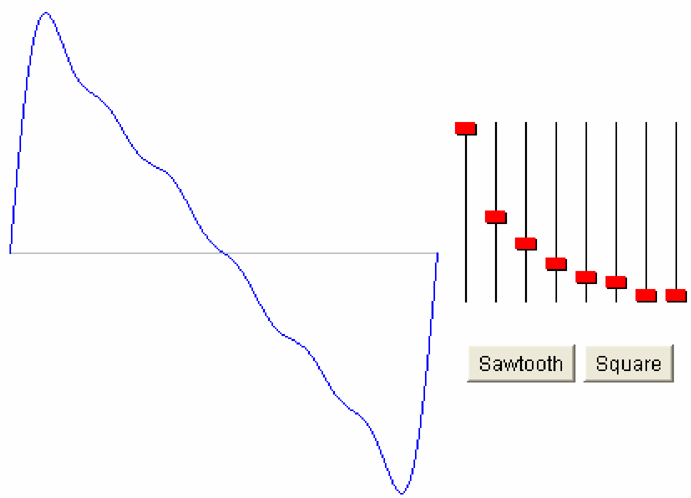
Note-se:

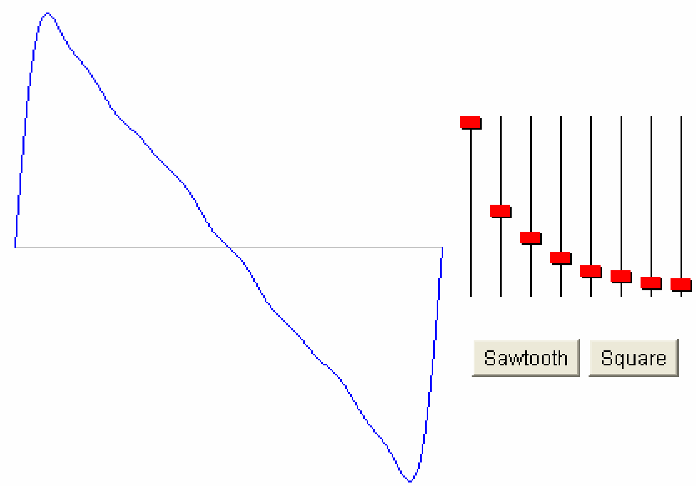
- o efeito de acrescentar mais componentes complexas na construção do sinal;
- o facto de os coeficientes espectrais serem conjugados;
- o efeito da variação das amplitudes e das fases dos coeficientes espectrais;
- o facto de os coeficientes serem conjugados conduzir a que a série de Fourier possa ser interpretada como uma soma de sinusóides, pelo que poderemos pensar apenas em coeficientes de índice positivo;
- o significado do coeficiente a_0;

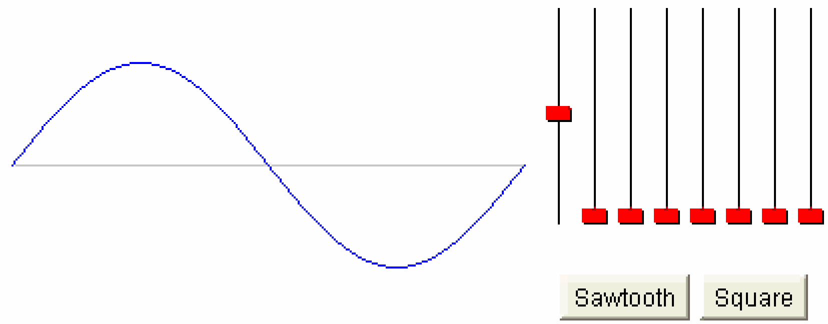

Sawtooth
Square
Sawtooth
Square
Sawtooth
Square
Sawtooth
Square


Sawtooth
Square


Sawtooth
Square


Sawtooth
Square


Sawtooth
Square


Sawtooth
Square

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

É de notar que exprimir um sinal **periódico** na sua série de Fourier não é mais do que interpretá-lo como sendo uma **soma de exponenciais complexas**, cada uma delas com um peso a_k, que se designa por **coeficiente de Fourier** ou **coeficiente espectral**.

Há ainda a ter em conta que se o sinal em questão é real, as exponenciais complexas hão-de ter coeficientes a_k que convertam as suas somas em sinais reais.

Do conhecimento prévio que temos, esses sinais serão senos ou cosenos, pois

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Para se conhecer na integra a representação de um sinal em série de Fourier, há apenas que determinar duas coisas:

- a primeira é a frequência fundamental ω_0 do sinal:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- a segunda são os coeficientes a_k que pesam cada exponencial complexa da soma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

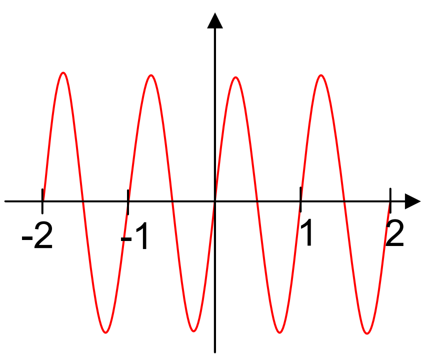
O valor de ω_0 retira-se imediatamente por inspecção, quer o sinal seja dado na sua forma analítica quer seja dado de forma gráfica.

Por exemplo, o sinal

$$x(t)=\cos(2\pi t)+3\cos(4\pi t+10)+12\cos(6\pi t-20)+5\cos(9\pi t+50)$$

tem como frequência fundamental π.

O sinal:



tem uma frequência angular dada por $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = 2\pi$

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Já a determinação dos coeficientes espectrais a_k passa por um processo não tão simples.

Note-se que por cada exponencial complexa que estamos a considerar, de frequência múltipla da frequência fundamental, teremos um coeficiente espectral a_k associado.

Considere-se o exemplo do coseno:

$$\cos(\omega_0 t)$$

A frequência fundamental retira-se de imediato:

$$\omega = \omega_0$$

Série de Fourier

Para determinar os coeficientes espectrais será necessário interpretar o coseno como uma soma de exponenciais complexas:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

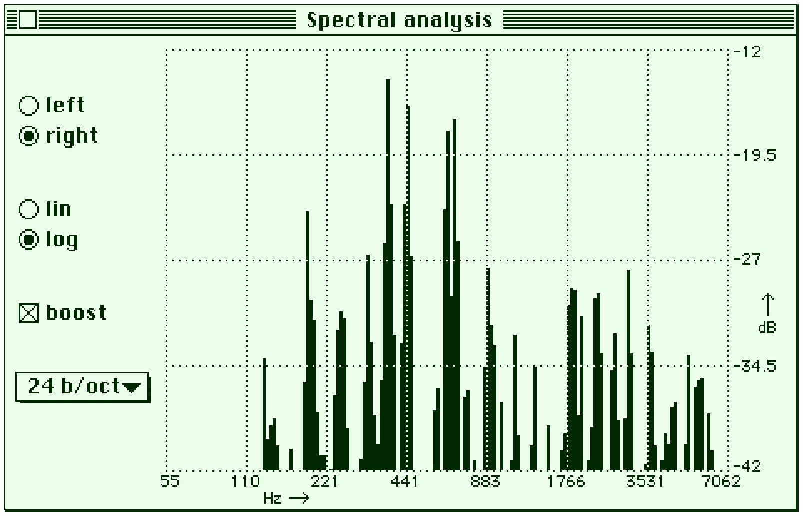
De onde se retira que:

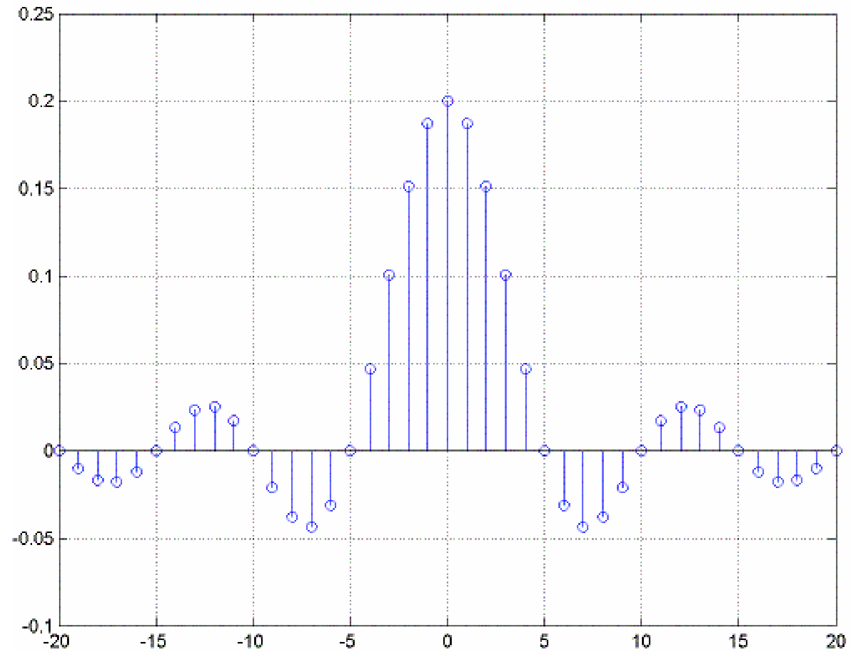
$$\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} = a_1 e^{j1\cdot\omega_0 t} + a_{-1}e^{j(-1)\cdot\omega_0 t}$$

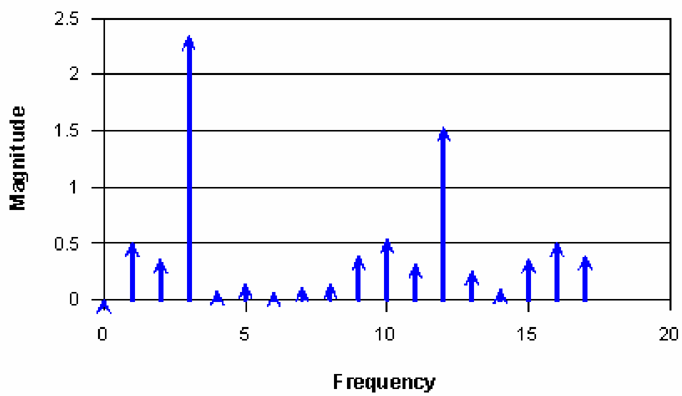
$$a_{-1} = \frac{1}{2}; a_1 = \frac{1}{2}$$

Quando o número de exponenciais complexas que constituem o sinal é reduzido, é possível enumerar estes coeficientes espectrais. No entanto, para sinais menos simples o número de coeficientes a_k pode ser infinito.

Torna-se necessário determinar uma expressão para os coeficientes a_k em vez de os enumerar.







Nos exemplos anteriores vimos como sintetizar sinais periódicos a partir de sinais elementares (sinusóides ou exponenciais complexas). A seguir analisamos como determinar os coeficientes espectrais a partir de um dado sinal.

Expressão para os coeficientes espectrais a_k

Um sinal periódico pode ser representado na forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Recorre-se agora a um artifício matemático cuja aplicação ficará mais clara posteriormente – multiplicar ambos os membros por $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

Integrando ambos os membros da expressão ao longo de um período (de 0 até T por exemplo):

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

Trocando a ordem do somatório e do integral:

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

Expressão para os coeficientes espectrais a_k

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^T a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

Os coeficientes a_k são constantes pelo que podem sair da integração:

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

A exponencial complexa dentro do integral do 2º membro pode ser convertida, usando as relações de Euler, para:

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\int_0^T \underbrace{\cos\left(\left(k-n\right)\omega_0 t\right) + j\sin\left(\left(k-n\right)\omega_0 t\right)}dt$$

É importante analisar a função integranda obtida na busca de simplificação.

Expressão para os coeficientes espectrais a_k

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T \cos\left((k-n)\omega_0 t\right) + j\sin\left((k-n)\omega_0 t\right)dt$$

$$\cos\left((k-n)\omega_0 t\right) + j\sin\left((k-n)\omega_0 t\right)$$

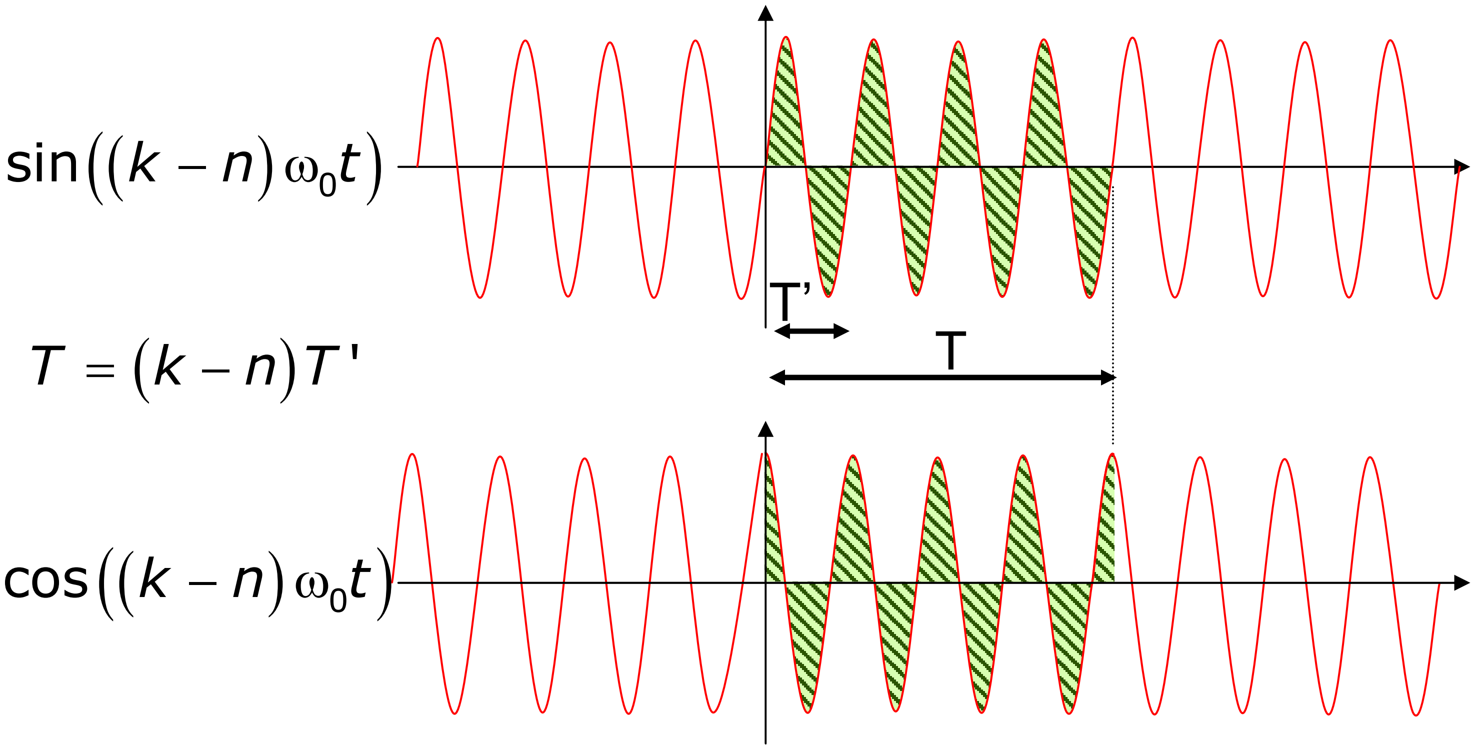
Para k≠n, quer a função *cos* quer a função *sin* são funções periódicas de frequência (k-n)ω_0. O período delas será portanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T'} \Leftrightarrow T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(k-n)\omega_0} = \frac{T}{(k-n)}$$

ou seja, no intervalo de *0* até *T* cabe um número inteiro de períodos das funções *cos* e *sin*.

Expressão para os coeficientes espectrais a_k

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T \cos\left((k-n)\omega_0 t\right) + j\sin\left((k-n)\omega_0 t\right)dt$$



Ao integrarmos um seno ou um coseno um número inteiro de períodos, o resultado é nulo. A 'área positiva' por baixo dos sinais iguala a 'área negativa', pelo que o cálculo do integral resulta em zero.

Expressão para os coeficientes espectrais a_k

Conclui-se então que para k≠n, o integral do 2º membro anula-se

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T \cos\left((k-n)\omega_0 t\right) + j\sin\left((k-n)\omega_0 t\right)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = 0$$

o que não permite obter um expressão para os coeficientes a_k.

Para k=n, a expressão

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T \cos\left((k-n)\omega_0 t\right) + j\sin\left((k-n)\omega_0 t\right)dt \Leftrightarrow$$

converte-se em:

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n \int_0^T \cos\left((n-n)\omega_0 t\right) + j\sin\left((n-n)\omega_0 t\right)dt \Leftrightarrow$$

Todas as parcelas do somatório são nulas excepto aquela para a qual k=n.

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n \int_0^T \cos(0) + j\sin(0)dt \Leftrightarrow$$

Determinação da representação de um sinal periódico em série de Fourier

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n\int_0^T \cos(0) + j\sin(0)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n\int_0^T 1dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T \Leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Dado que o sinal x(t) é periódico de período *T* e que para a exponencial complexa da função integranda o período *T* é um múltiplo inteiro do seu período, a integração não necessita ser feita especificamente no intervalo de *0* a *T*, mas poderá ser feita em qualquer intervalo de duração *T*.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Série de Fourier: equação de síntese e equação de análise

Então se x(t) é um sinal periódico, ele terá uma representação em série de Fourier na forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

onde os coeficientes da série são dados por:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

A primeira equação é designada por equação de **síntese**.

A segunda equação é designada por equação de **análise**.

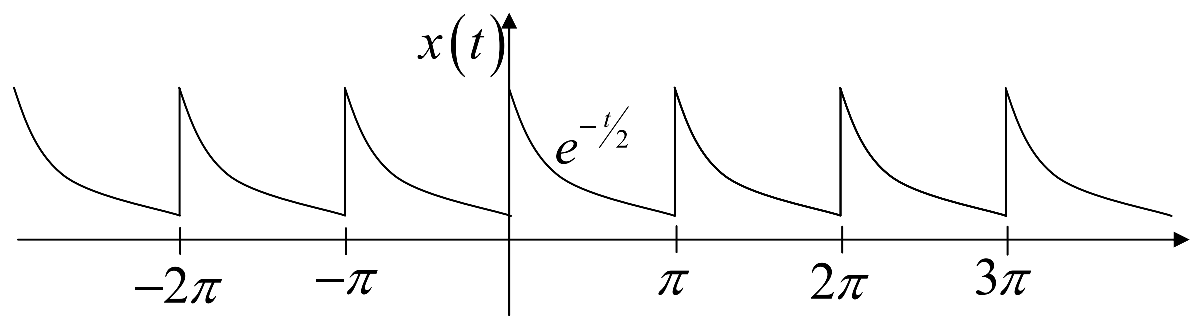
Os coeficientes a_k são designados por **coeficientes espectrais**.

Exemplos da determinação da representação em série de Fourier

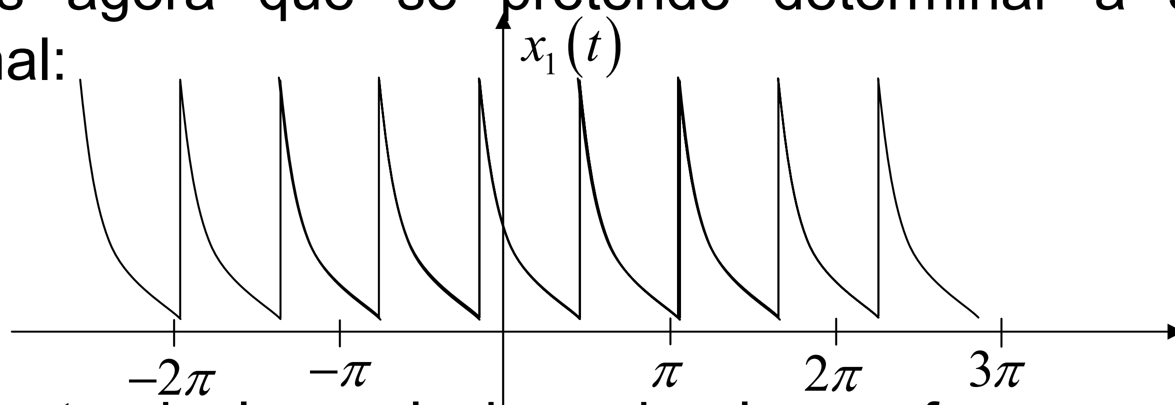
Para os dois sinais seguintes, determine a representação em série de Fourier.

Exemplo 1: $$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(5\pi t)$$

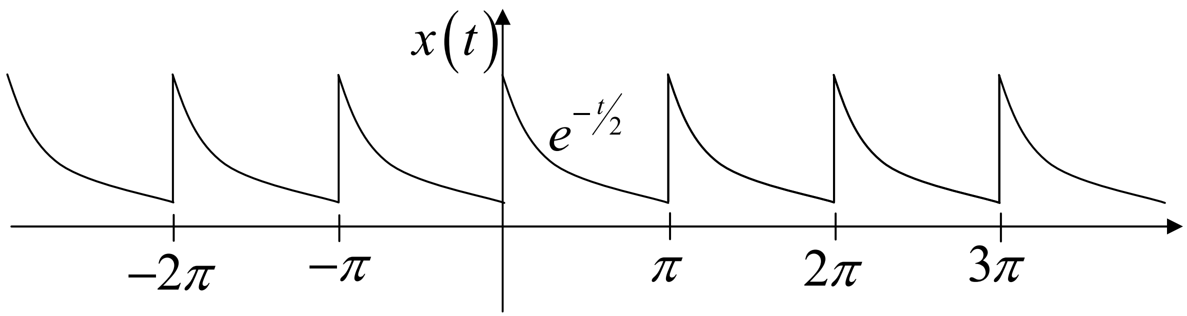
Exemplo 2:



Consideremos agora que se pretende determinar a série de Fourier do sinal:



Note-se que este sinal se relaciona de alguma forma com o sinal seguinte:



O sinal $x_1(t)$ pode ser obtido a partir de x(t) através de transformações na variável independente (translação temporal, escalonamento temporal, multiplicação por um factor constante).

Será então necessário aplicar de novo a equação de análise a $x_1(t)$ para determinar a sua série de Fourier ou será possível obtê-la a partir da série de Fourier de x(t) já calculada?

Propriedades da série de Fourier

Os aspectos fundamentais da série de Fourier são o seu período fundamental (ou **frequência fundamental ω_0**) e os seus **coeficientes espectrais a_k**.

As propriedades a estudar enunciam o que sucede à representação em série de Fourier quando se altera o sinal original.

As propriedades que vamos estudar são:

- linearidade;
- deslocamento temporal;
- inversão temporal;
- escalonamento temporal;

Simplificação da notação em Série de Fourier

É útil introduzir a seguinte notação:

sendo x(t) um sinal periódico cuja representação em série de Fourier é dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

a mesma informação será dada indicando apenas:

$$x(t) \overset{SF}{\rightarrow} a_k, \omega_0$$

Propriedades da Série de Fourier

Linearidade

Sendo x(t) e r(t) sinais periódicos com o mesmo período:

$$x(t) \overset{SF}{\rightarrow} a_k, \omega_0$$

$$r(t) \overset{SF}{\rightarrow} b_k, \omega_0$$

A combinação linear destes dois sinais resultará em:

$$z(t) = Ax(t) + Br(t) \overset{SF}{\rightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k, \omega_0$$

A frequência fundamental do sinal resultante da soma é a mesma, e os coeficientes espectrais são dados pela soma pesada dos coeficientes de cada sinal.

Propriedades da Série de Fourier

Demonstração da propriedade da linearidade da série de Fourier.

$$z(t) = Ax(t) + Br(t) \quad \xrightarrow{SF} \quad c_k = Aa_k + Bb_k, \omega_0$$

Os coeficientes espectrais do sinal z(t) serão dados pela equação de análise:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \Leftrightarrow$$

$$z(t) = Ax(t) + Br(t)$$

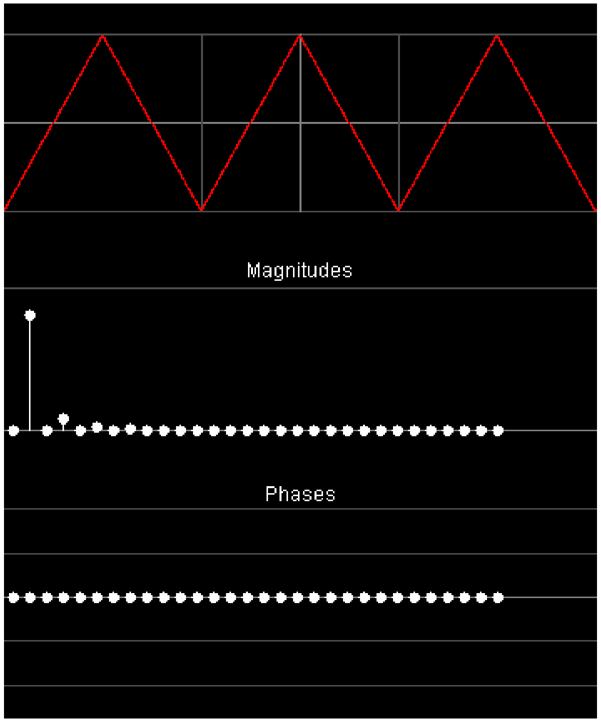
$$c_k = \frac{1}{T}\int_T \left[Ax(t) + Br(t)\right] e^{-jk\omega_0 t} dt \Leftrightarrow$$

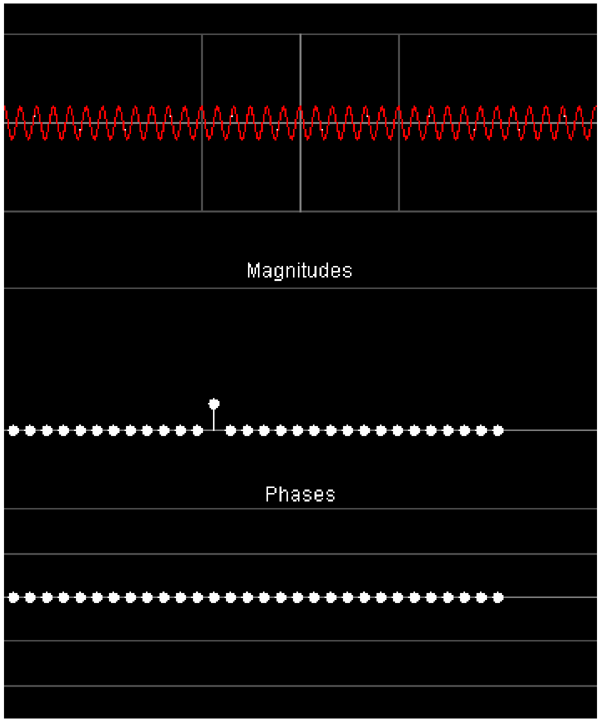
$$c_k = \underbrace{A\frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}_{a_k} + \underbrace{B\frac{1}{T}\int_T r(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}_{b_k} \Leftrightarrow$$

$$c_k = Aa_k + Bb_k$$

A soma de dois sinais com o mesmo período resulta naturalmente num sinal do mesmo período e frequência, neste caso ω_0 .

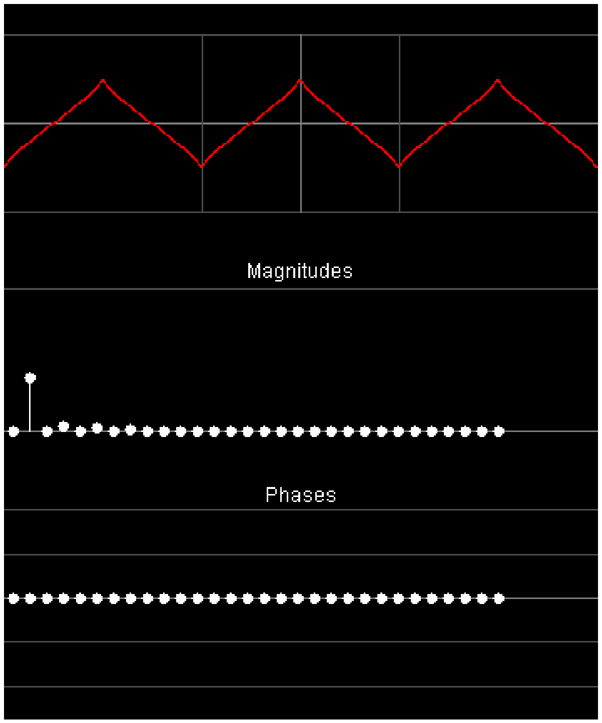
Para demonstrar na prática esta propriedade, comecemos por considerar os coeficientes espectrais de dois sinais:

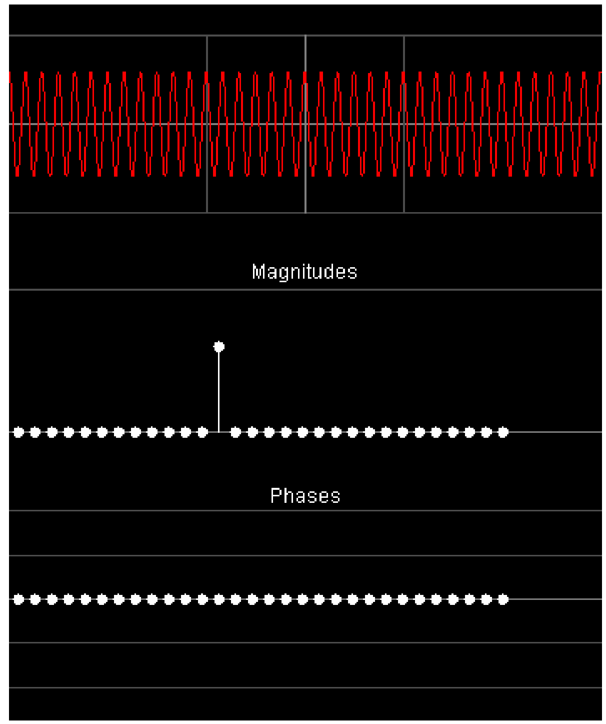




Se multiplicarmos os coeficientes de cada um destes sinais por um dado factor, naturalmente obteremos novos sinais. Vamos assumir que multiplicamos os coeficientes do primeiro sinal por ½ e os coeficientes do segundo por 3.

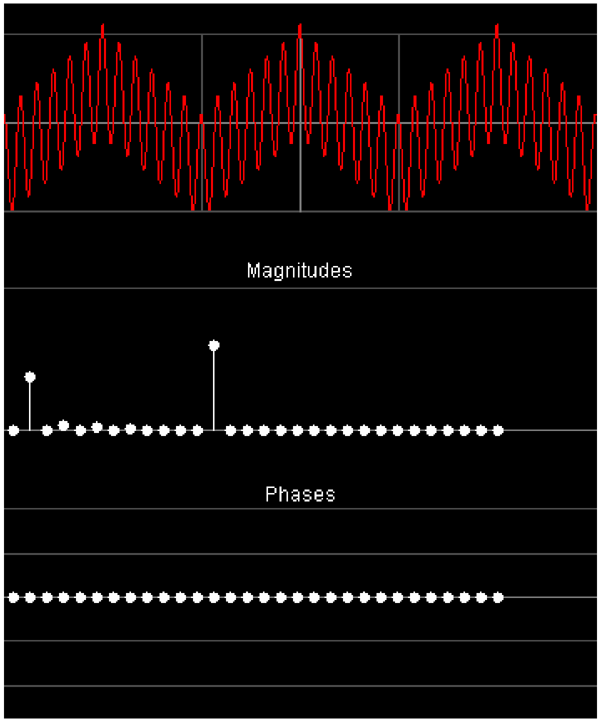
Os coeficientes que se obtêm são ilustrados a seguir, tais como os novos sinais.



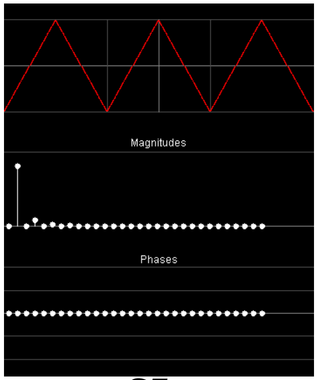


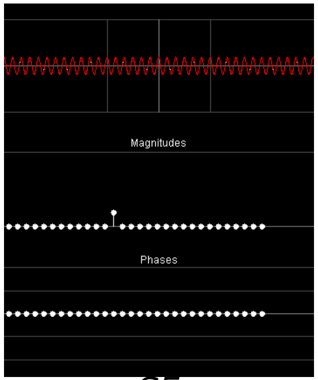
A intenção agora será ilustrar o que acontece se somarmos estes novos coeficientes de um e de outro sinal.

O sinal obtido por soma dos coeficientes pesados de cada sinal é o ilustrado a seguir:

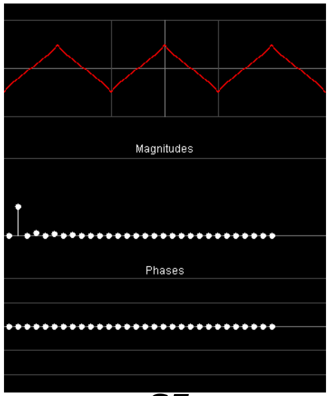


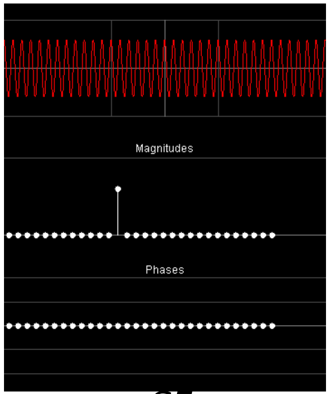
O próximo slide sumaria os passos dados na demonstração da propriedade da linearidade da série de Fourier.



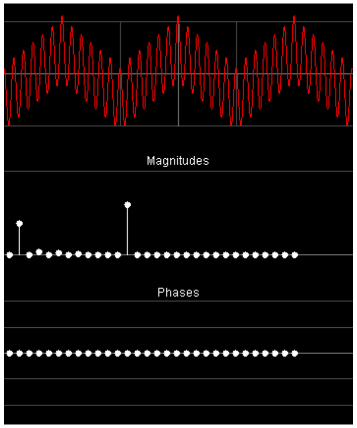


$$x(t) \xrightarrow{SF} a_k, \omega_0 \qquad r(t) \xrightarrow{SF} b_k, \omega_0$$





$$Ax(t) \xrightarrow{SF} Aa_k, \omega_0 \qquad Br(t) \xrightarrow{SF} Bb_k, \omega_0$$



$$z(t) = Ax(t) + Br(t) \xrightarrow{SF} c_k = Aa_k + Bb_k, \omega_0$$

Propriedades da Série de Fourier

Deslocamento temporal

Se tivermos um sinal x(t) periódico representável em série de Fourier:

$$x(t) \xrightarrow{SF} a_k, \omega_0$$

Um sinal z(t) que se relaciona com x(t) através de

$$z(t) = x(t - t_0)$$

terá uma representação em série de Fourier:

$$z(t) \xrightarrow{SF} c_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \quad , \quad \omega_0$$

Propriedades da Série de Fourier

Demonstração da propriedade do deslocamento temporal da série de Fourier.

Dado que queremos determinar a representação em série de Fourier de um sinal z(t) teremos de recorrer à equação de análise para determinar os seus coeficientes espectrais:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt \Leftrightarrow$$

$$z(t) = x(t - t_0)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t - t_0)\,e^{-jk\omega_0 t}dt \Leftrightarrow$$

Realizando uma mudança de variável: $\tau = t - t_0$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\,e^{-jk\omega_0(\tau + t_0)}d\tau \Leftrightarrow$$

$$c_k = e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)\,e^{-jk\omega_0 \tau}d\tau \Leftrightarrow$$

Propriedades da Série de Fourier

$$c_k = e^{-jk\omega_0 t_0} \underbrace{\frac{1}{T}\int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau}_{a_k} \Leftrightarrow$$

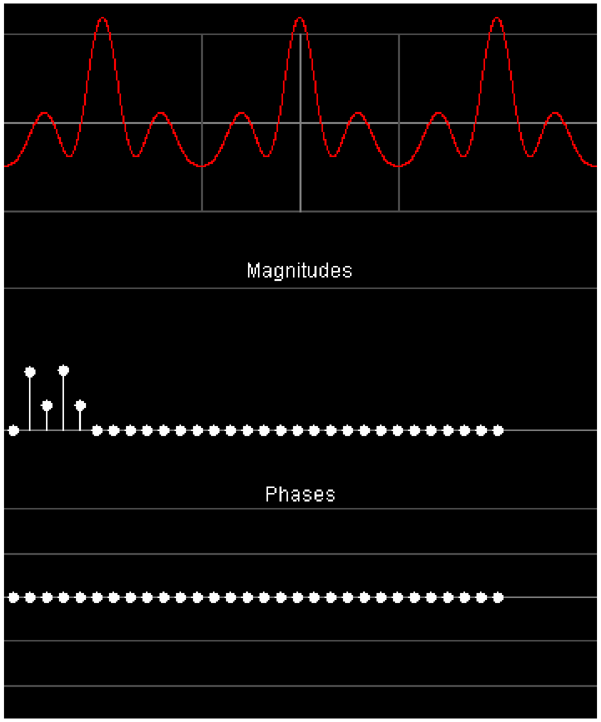
$$c_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

Quando um sinal x(t) sofre um deslocamento, o período desse sinal é preservado, pelo que ω_0 será ainda a frequência do novo sinal obtido.

Demonstrou-se então que:

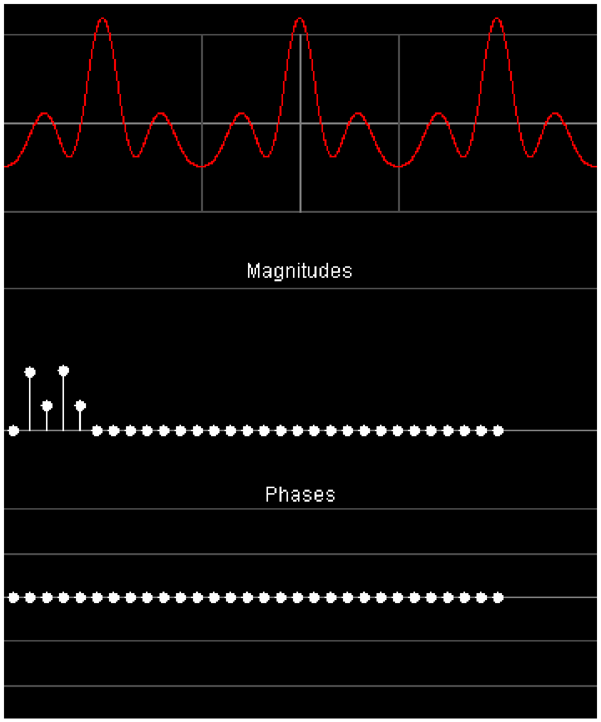
$$z(t) \xrightarrow{SF} c_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \quad , \quad \omega_0$$

Para demonstrar na prática esta propriedade, comecemos por considerar os coeficientes espectrais do seguinte sinal:

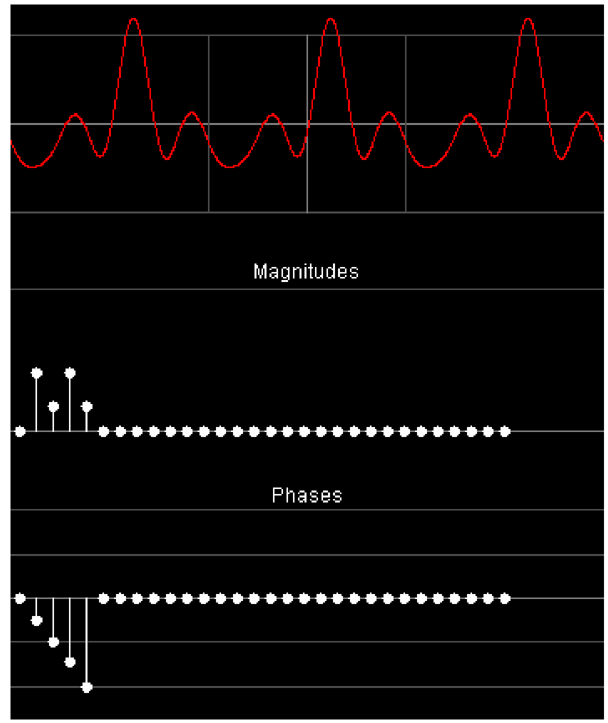


Este sinal tem quatro componentes espectrais não nulas cada uma delas com uma fase nula.

Verifiquemos o que acontece caso se introduza um desfasamento para cada componente de valor $-k\omega_0 t_0$. Neste caso fez-se $\omega_0 t_0 = \pi/4$



$x(t)$



$z(t)$

$$z(t) = x(t - t_0)$$

$$z(t) \overset{SF}{\rightarrow} c_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \quad , \quad \omega_0$$

Devido aos desfasamentos provocados em cada componente, o sinal total sofreu um deslocamento temporal.

Inversão temporal

Se tivermos um sinal x(t) periódico representável em série de Fourier:

$$x(t) \xrightarrow{SF} a_k \, , \omega_0$$

Um sinal z(t) que se relaciona com x(t) através de

$$z(t) = x(-t)$$

terá uma representação em série de Fourier:

$$z(t) \quad \xrightarrow{SF} \quad c_k = a_{-k} \quad , \quad \omega_0$$

ou seja, há uma inversão na ordem dos coeficientes espectrais.

Propriedades da Série de Fourier

Demonstração da propriedade da inversão temporal da série de Fourier.

Dado que queremos determinar a representação em série de Fourier de um sinal z(t) teremos de recorrer à equação de análise para determinar os seus coeficientes espectrais:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt \Leftrightarrow$$

$$z(t) = x(-t)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(-t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt \Leftrightarrow$$

Realizando uma mudança de variável: $\tau = -t$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\,e^{-jk\omega_0(-\tau)}d\tau \Leftrightarrow$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\,e^{-j(-k)\omega_0 \tau}d\tau \Leftrightarrow$$

Propriedades da Série de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\, e^{-j(-k)\omega_0 \tau} d\tau \Leftrightarrow$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$c_k = a_{-k}$$

Numa inversão temporal o período mantém-se inalterado, pelo que a frequência do sinal invertido será ainda ω_0 .

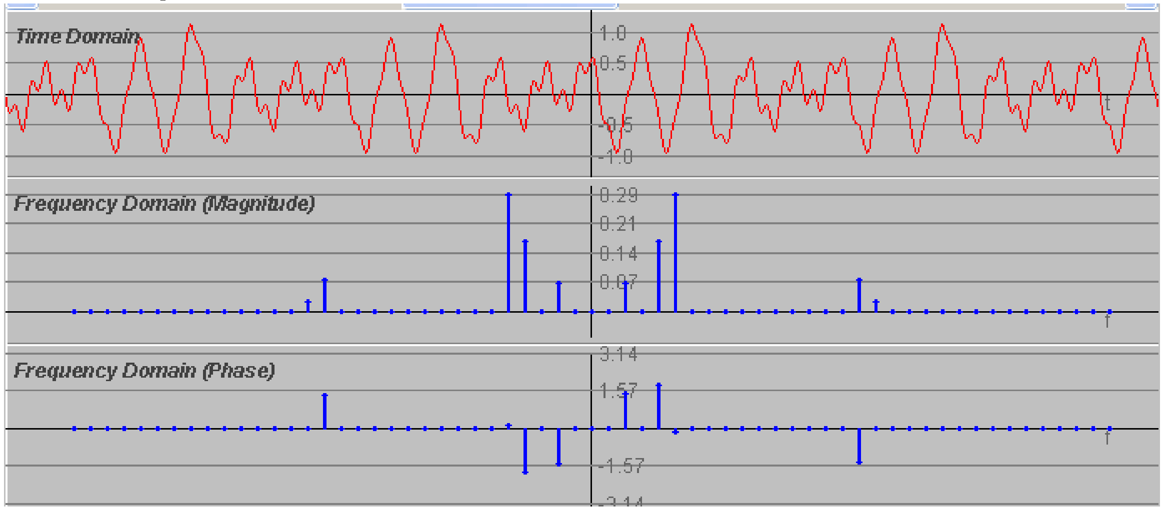
Conclui-se então que para:

$$z(t) = x(-t)$$

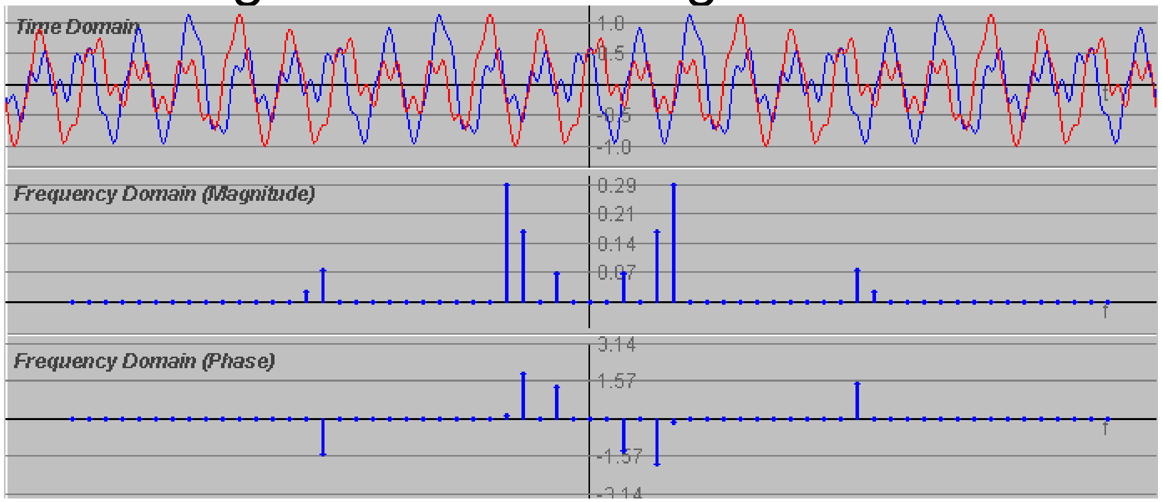
Se obtém uma representação em série de Fourier a partir dos coeficientes espectrais de x(t) na forma:

$$z(t) \quad \xrightarrow{SF} \quad c_k = a_{-k} \quad , \quad \omega_0$$

O sinal a seguir ilustrado representa uma vogal no domínio do tempo e da frequência.



No sinal seguinte, trocámos os coeficientes de ordem positiva pelos de ordem negativa. O sinal original é ilustrado a azul.



Escalonamento temporal

Se tivermos um sinal x(t) periódico representável em série de Fourier:

$$x(t) \xrightarrow{SF} a_k \quad , \quad \omega_0$$

Um sinal z(t) que se relaciona com x(t) através de

$$z(t) = x(\alpha t) \quad \text{onde } \alpha \text{ é real}$$

terá uma representação em série de Fourier:

$$z(t) \xrightarrow{SF} c_k = a_k \quad , \quad \alpha \cdot \omega_0$$

Propriedades da Série de Fourier

Demonstração da propriedade do escalonamento temporal da série de Fourier.

A operação de escalonamento temporal altera o período de um sinal.

Se x(t) é um sinal periódico de período *T* e frequência fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

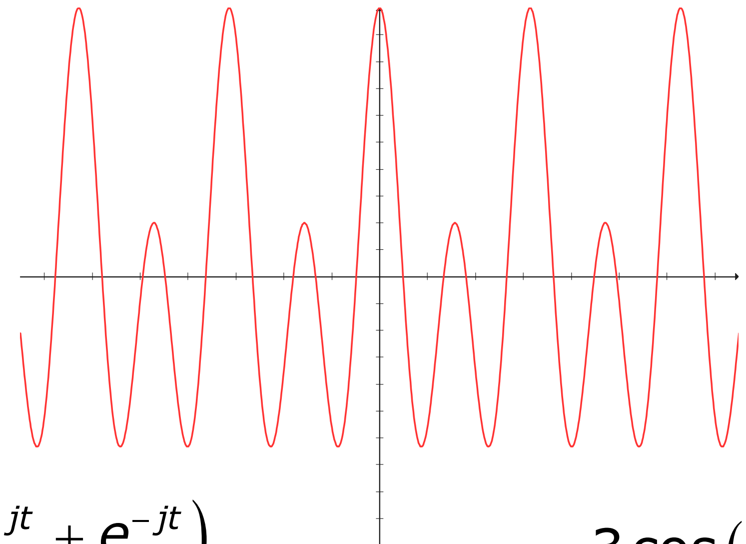
Então o sinal x(αt) terá período *T'=T/α* e a frequência passará a ser dada por:

$$\omega'_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T/\alpha} = \alpha\frac{2\pi}{T} = \alpha\omega_0$$

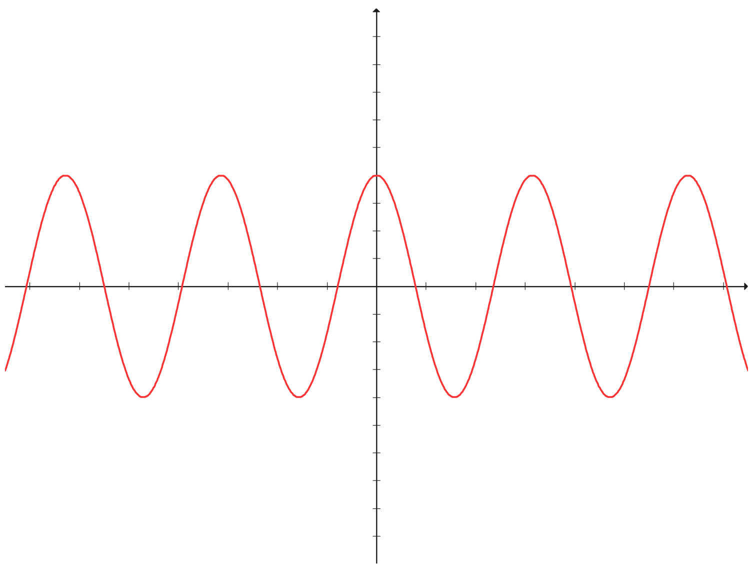
Os coeficientes da série de Fourier mantêm-se inalterados pois os pesos das componentes harmónicas são os mesmos, pelo que:

$$z(t) \quad \xrightarrow{SF} \quad c_k = a_k \quad , \quad \alpha \cdot \omega_0$$

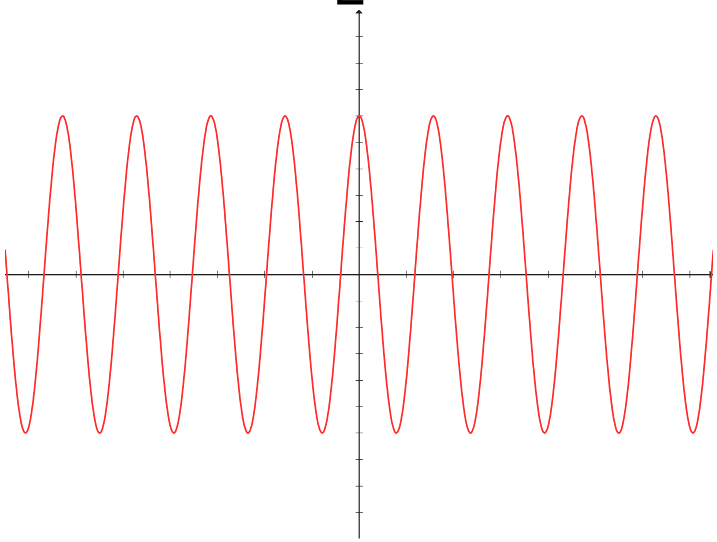
$$2\cos(t) + 3\cos(2t) = \left(e^{jt} + e^{-jt}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) = e^{jt} + e^{-jt} + \frac{3}{2}e^{j2t} + \frac{3}{2}e^{-j2t}$$



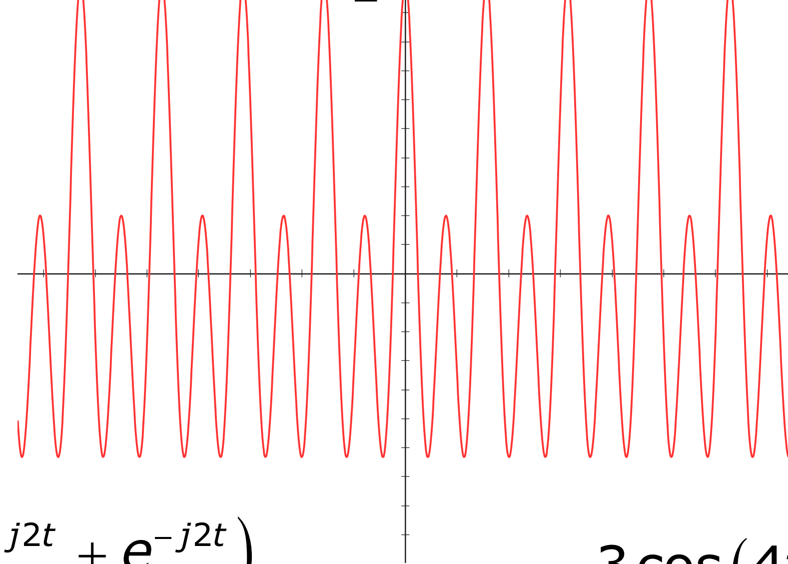
$$2\cos(t) = \left(e^{jt} + e^{-jt}\right)$$



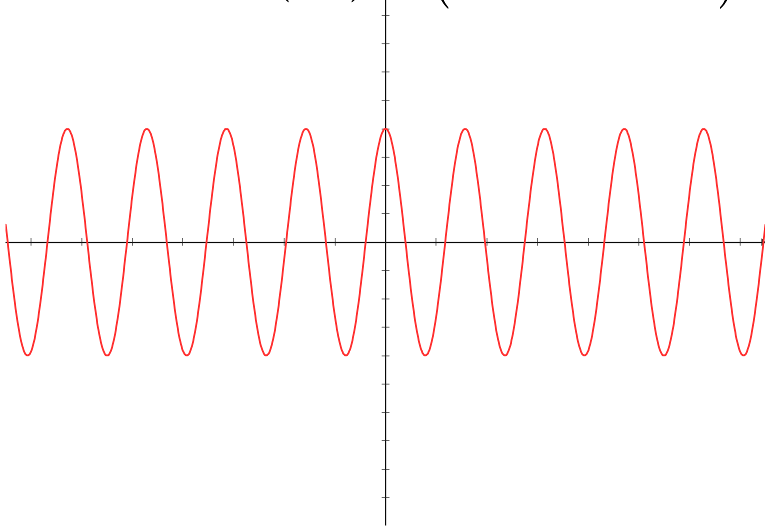
$$3\cos(2t) = \frac{3}{2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right)$$



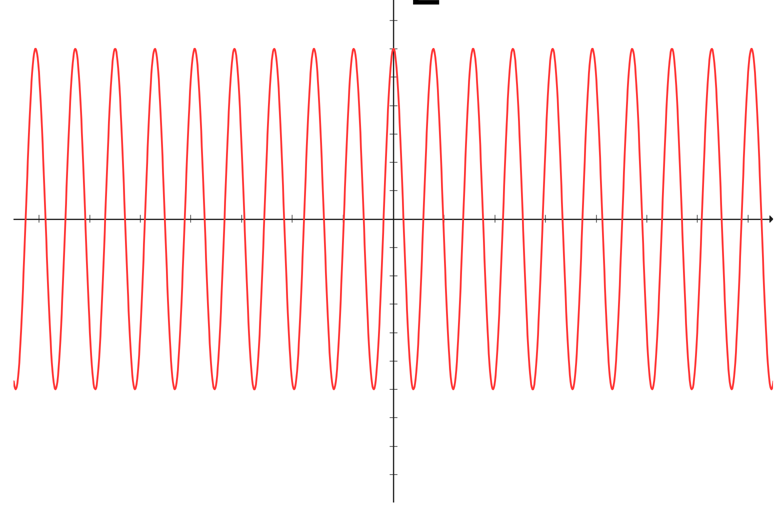
$$2\cos(2t) + 3\cos(4t) = \left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j4t} + e^{-j4t}\right) = e^{j2t} + e^{-j2t} + \frac{3}{2}e^{j4t} + \frac{3}{2}e^{-j4t}$$



$$2\cos(2t) = \left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right)$$

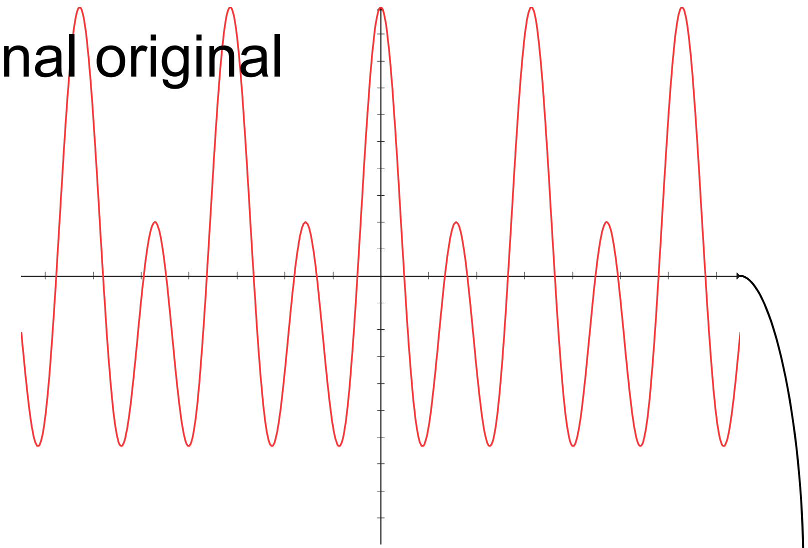


$$3\cos(4t) = \frac{3}{2}\left(e^{j4t} + e^{-j4t}\right)$$



Propriedades da Série de Fourier

Sinal original



$$\underbrace{e^{jt}}_{a_1} + \underbrace{e^{-jt}}_{a_{-1}} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{a_2}e^{j2t} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{a_{-2}}e^{-j2t}$$

Escalonamento temporal por um factor de 2.

Sinal escalonado

$$\underbrace{e^{j2t}}_{a_1} + \underbrace{e^{-j2t}}_{a_{-1}} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{a_2}e^{j4t} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{a_{-2}}e^{-j4t}$$

Após o escalonamento temporal, os coeficientes a_k mantêm-se inalterados. Apenas a frequência fundamental se modificou para metade.

Transformada de Fourier

Foi visto como é possível determinar uma representação espectral de sinais periódicos.

É interessante notar que também **sinais não periódicos** podem ser representados como somas de exponenciais complexas, ou de outra forma, como somas de sinusóides.

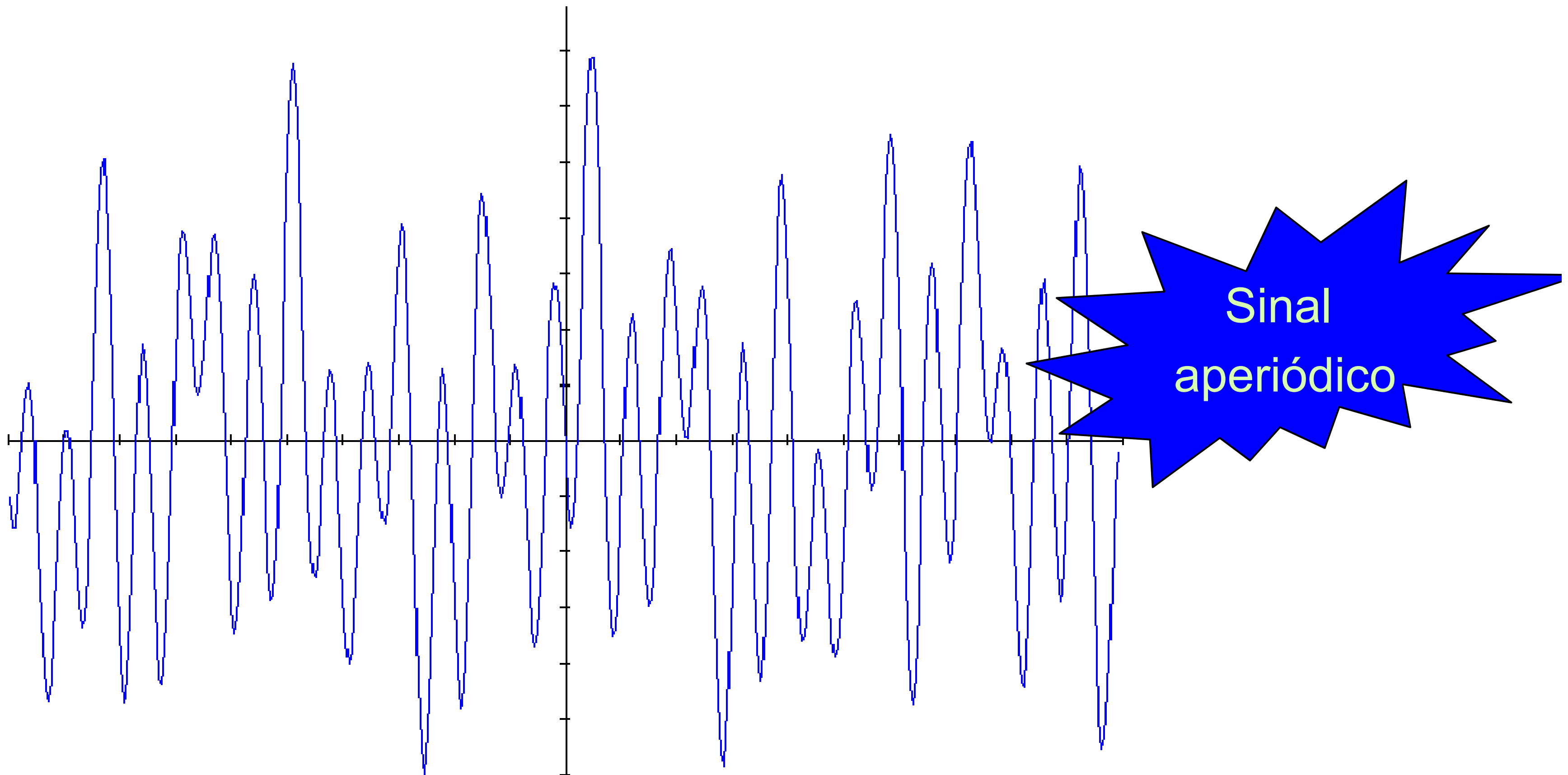
Neste caso, no entanto, não existe uma relação harmónica entre essas exponenciais.

Não havendo uma relação harmónica (as exponenciais complexas periódicas deixam de ter períodos múltiplos de um fundamental), **deixa de fazer sentido a série de Fourier**.

Passa então a falar-se de **Transformada de Fourier**.

A dedução da expressão da **Transformada de Fourier** pode no entanto ser obtida a partir da série de Fourier.

O gráfico seguinte ilustra o que acontece quando se somam sinusóides de frequências que não se relacionam harmonicamente (não são múltiplas inteiras de uma fundamental):

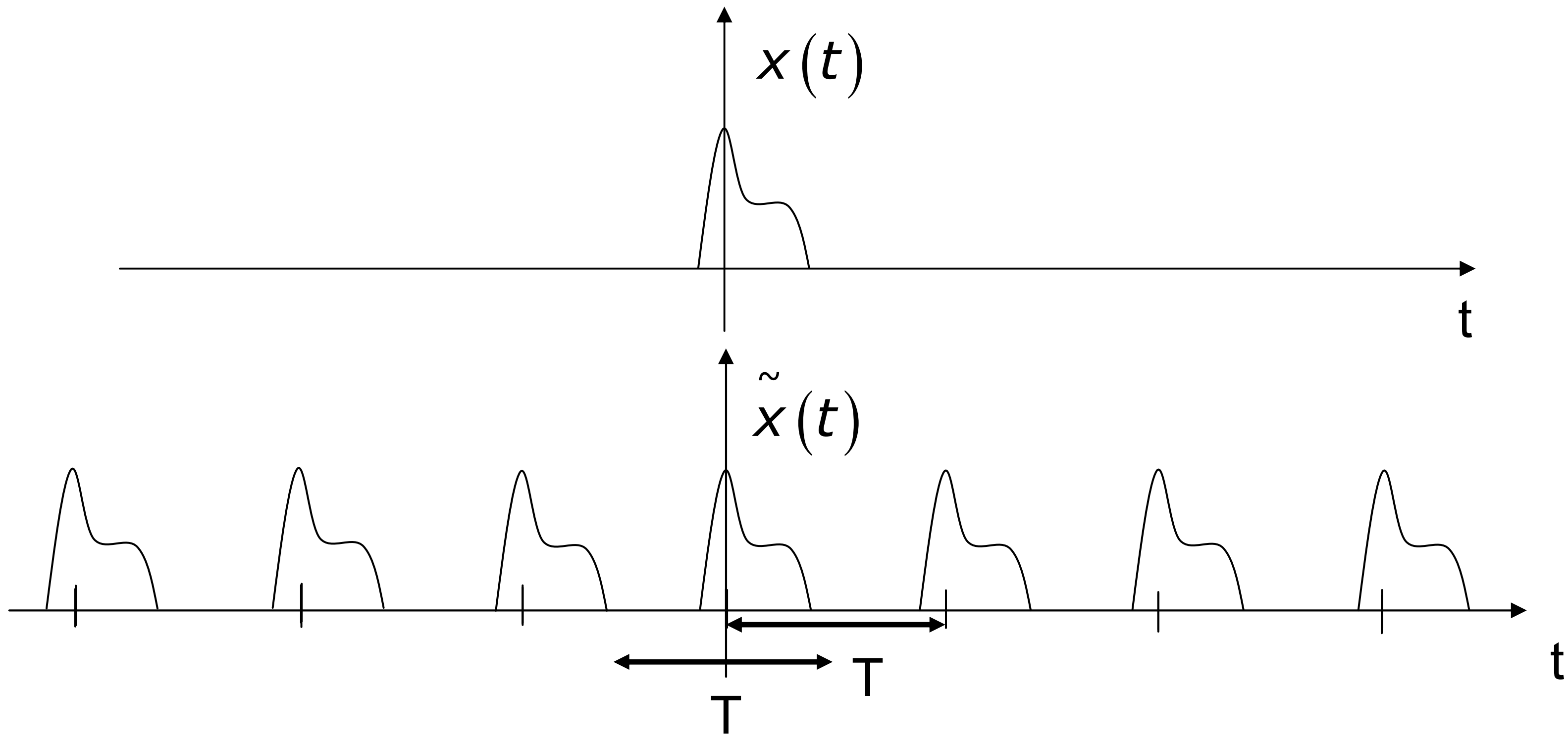


$$f(t)=\cos(t+12)+1.2\cos(7.1t+3)+2\cos(3.6t+5)+3\cos(9.3t+8)$$

É possível demonstrar que sinais aperiódicos podem ser representados como somas de sinusóides sem relação harmónica.

Transformada de Fourier

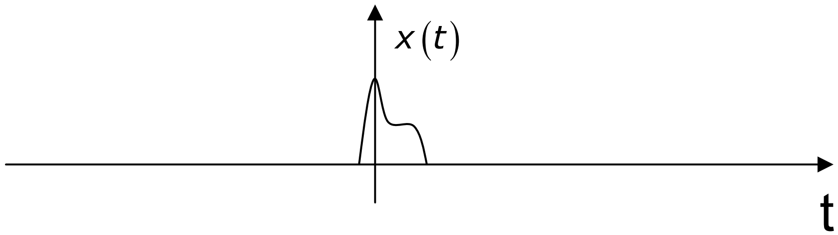
Um sinal aperiódico de duração finita pode ser visto como um sinal periódico cujo período foi tornado infinito.

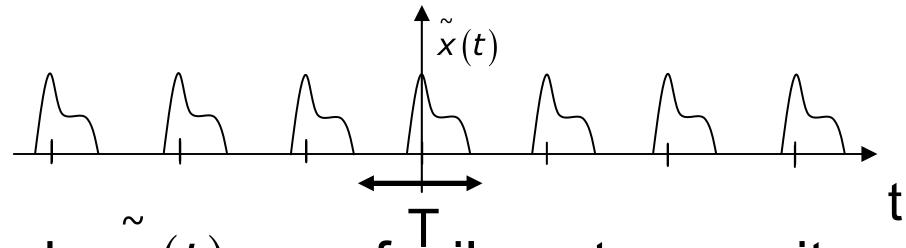


Há um período de $\tilde{x}(t)$ ao longo do qual este sinal é igual ao sinal $x(t)$

À medida que T aumenta, $\tilde{x}(t)$ torna-se idêntico a $x(t)$ num intervalo maior.

Transformada de Fourier





Pretende-se obter uma expressão de $\tilde{x}(t)$ que facilmente permita determinar uma expressão para $x(t)$, fazendo T→∞.

Dado que o sinal $\tilde{x}(t)$ é periódico, ele verifica as equações de síntese e de análise de Fourier, ou seja:

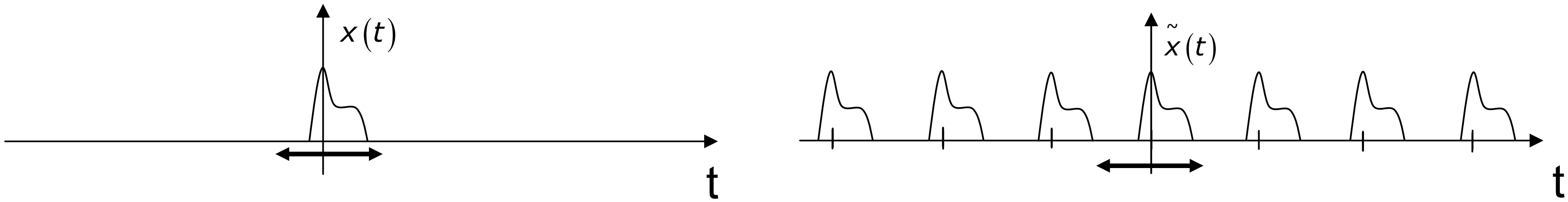
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Dada a relação entre os sinais $\tilde{x}(t)$ e $x(t)$ a segunda equação pode ser escrita como:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Transformada de Fourier



$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt \Leftrightarrow$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt \Leftrightarrow$$

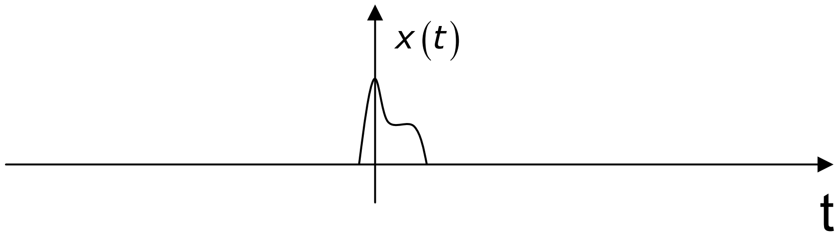
Definindo, para simplificação da notação:

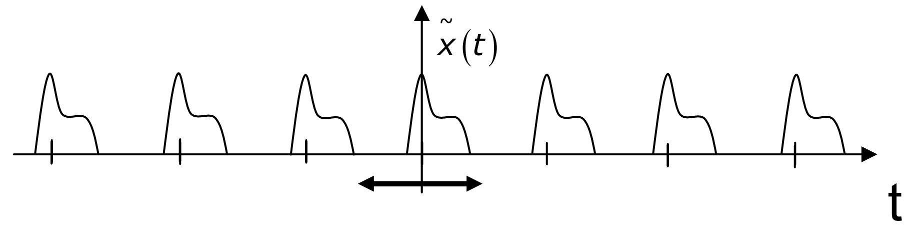
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

Obtém-se:

$$a_k = \frac{1}{T}X(k\omega_0)$$

Transformada de Fourier





$$a_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0)$$

Substituindo este resultado em $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

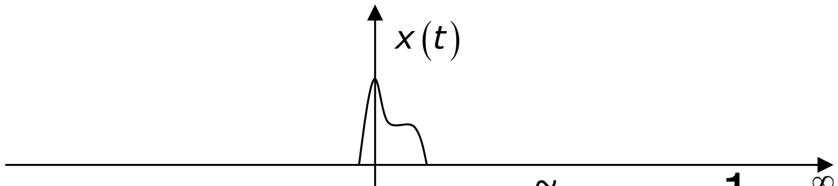
Ou de forma equivalente:

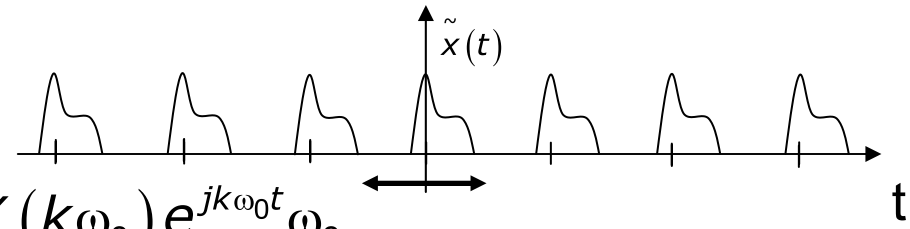
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

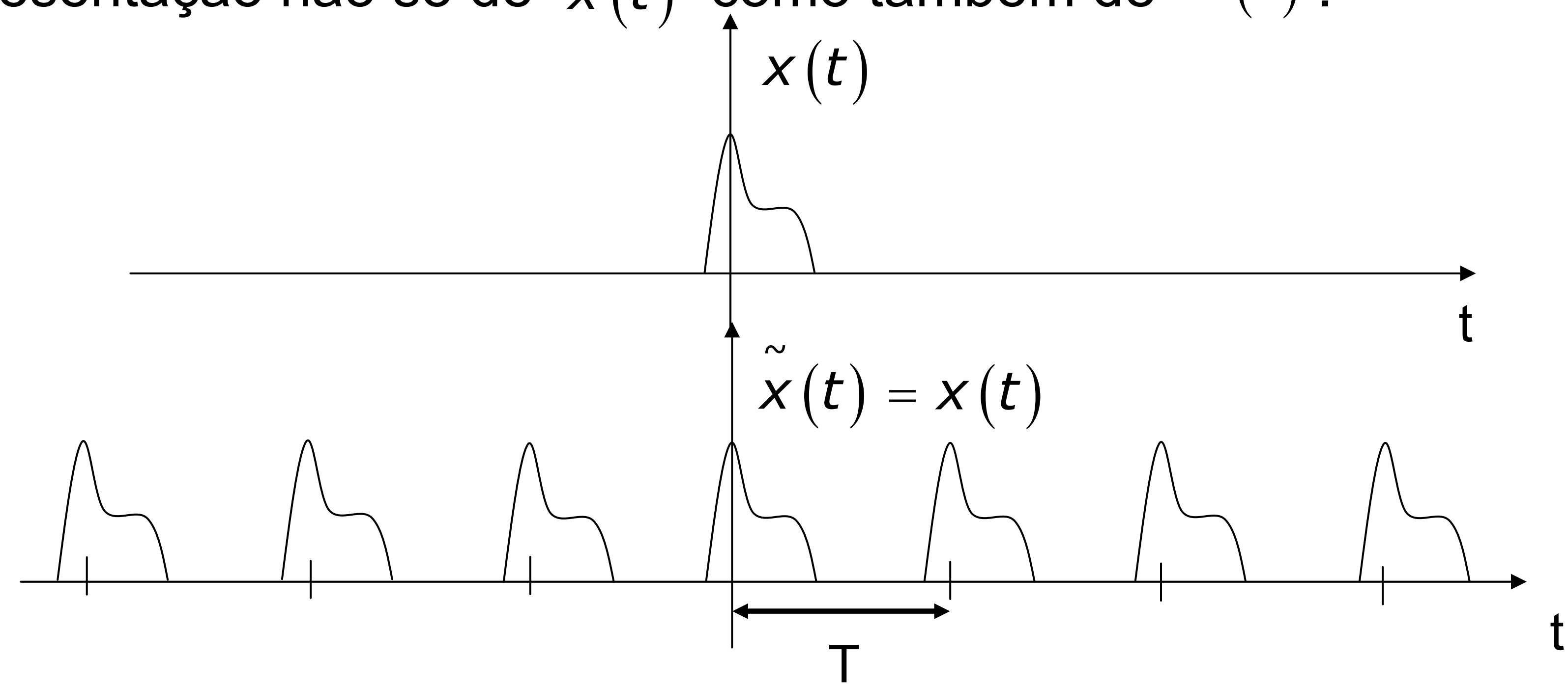
Transformada de Fourier





$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\,\omega_0$$

À medida que o período $T \to \infty$, $\tilde{x}(t)$ aproxima o sinal $x(t)$ e consequentemente, no limite, a equação anterior torna-se uma representação não só de $\tilde{x}(t)$ como também de $x(t)$.



Transformada de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

À medida que o período $T \to \infty$, $\tilde{x}(t)$ aproxima o sinal $x(t)$ e consequentemente, no limite, a equação anterior torna-se uma representação não só de $\tilde{x}(t)$ como também de $x(t)$.

Como o período foi tornado infinito, os elementos da expressão anterior sofrem várias alterações:

$$\omega_0 \to d\omega$$

$$k\omega_0 \to \omega$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$$

Pelo que x(t) será dado por: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Transformada de Fourier

Conclui-se então que:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Esta expressão mostra como um sinal não periódico pode ser representado como uma soma de exponenciais complexas.

A expressão X(ω) surgiu de uma atribuição feita durante a dedução da transformada de Fourier e é dada por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

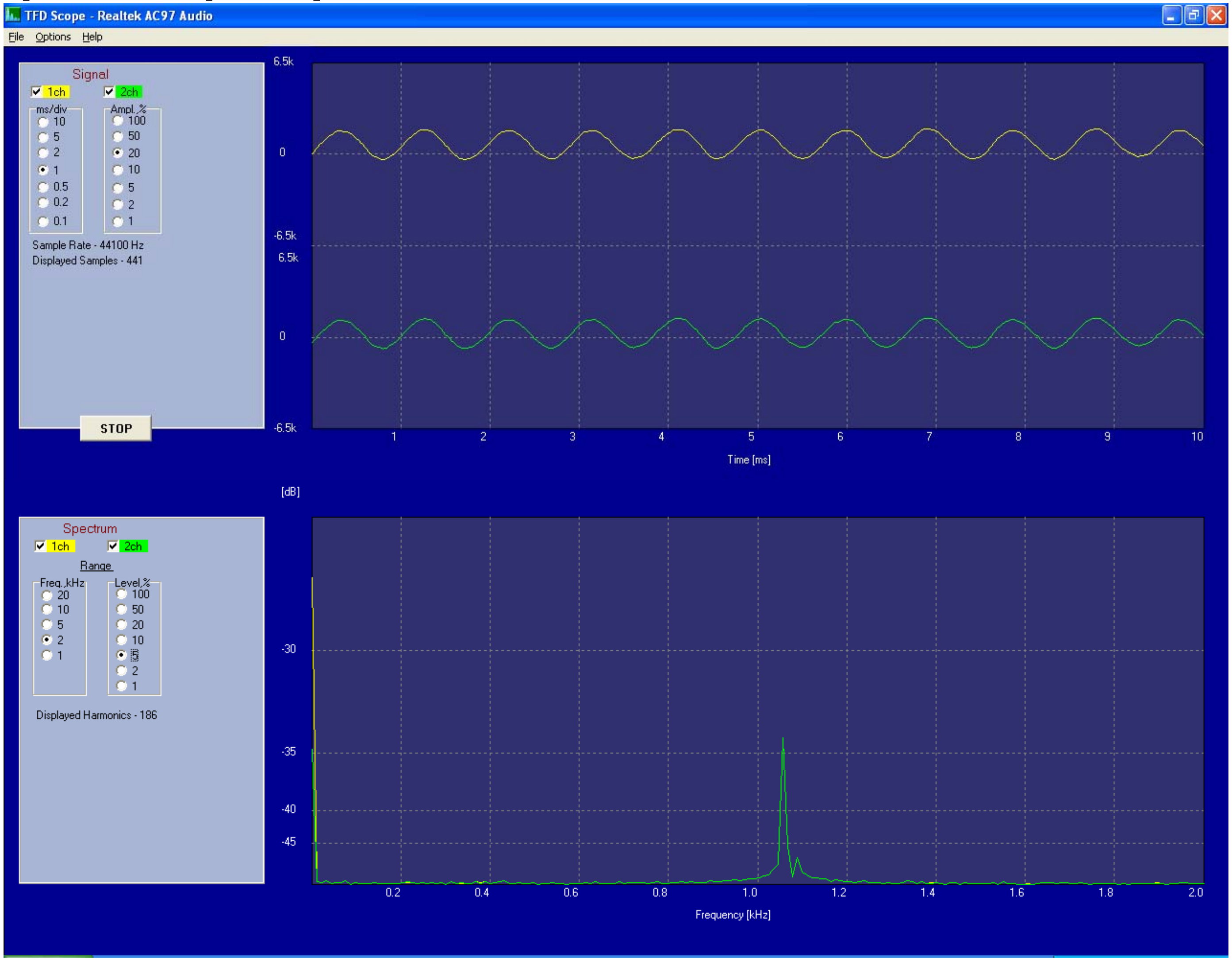
A primeira expressão recebe a designação de **Tranformada Inversa de Fourier**.

A segunda expressão recebe a designação de **Tranformada (Directa) de Fourier**.

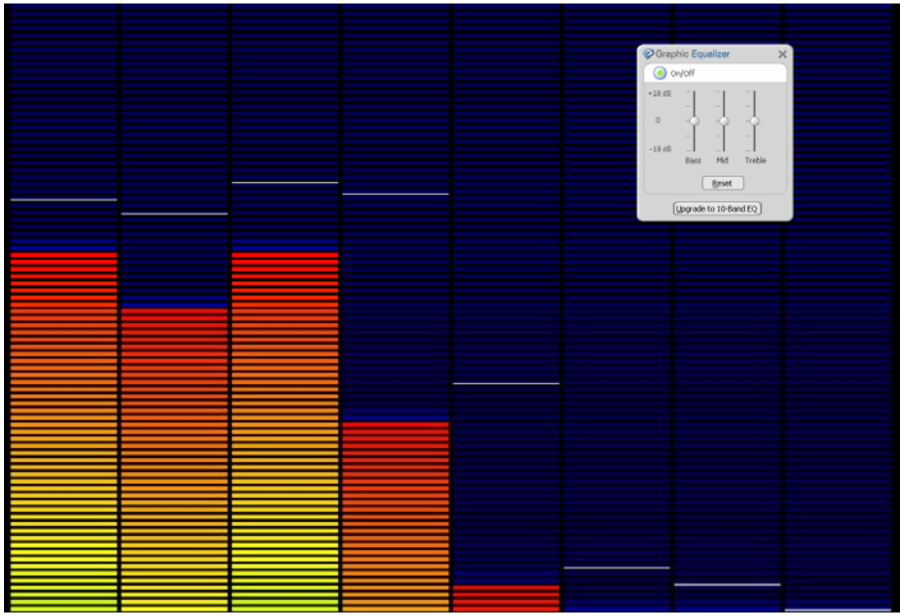
Série e Transformada de Fourier

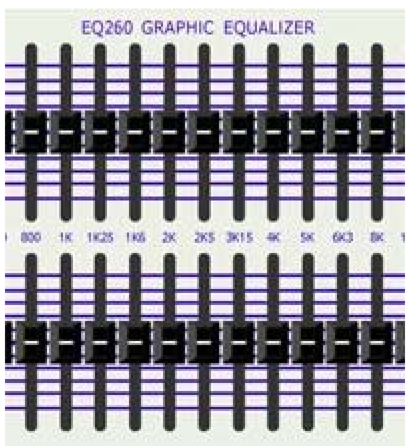
Série de Fourier	Transformada de Fourier
Sinal x(t) periódico	Sinal x(t) aperiódico
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$	$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
Soma de exponenciais de relação harmónica:	Soma de exponenciais sem relação harmónica:
$$e^{jk\omega_0 t}$$	$$e^{j\omega t}$$
Cada exponencial complexa tem um peso:	Cada exponencial complexa tem um peso:
$$a_k$$	$$\frac{1}{2\pi} X(\omega) d\omega$$
O espectro, peso de cada frequência que constitui o sinal, é dado por:	O espectro, peso de cada frequência que constitui o sinal, é dado por:
$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$	$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

É possível verificar os conceitos de transformada de Fourier para sinais aperiódicos (e também periódicos como é aproximadamente um assobio) recorrendo a software de determinação do espectro de sinais adquiridos pela placa de som de um PC.



Conceitos comuns de áudio como é o da equalização estão intimamente relacionados com esta teoria.





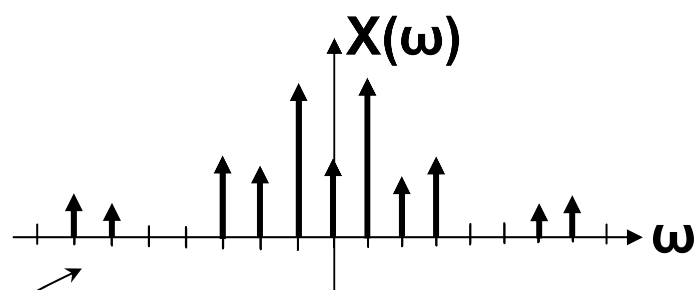
Transformada de Fourier de sinais periódicos

A transformada de Fourier não é exclusivamente determinável para sinais aperiódicos.

A transformada de Fourier de um sinal periódico é também determinável, e pode ser extraída da sua representação em série de Fourier.

A transformada resultante consiste num **pente de impulsos no domínio da frequência**, **localizados nas frequências harmónicas da fundamental**, impulsos esses com uma área proporcional aos respectivos impulsos espectrais.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \xrightarrow{F}$$



Sinal periódico no tempo

Transformada de um sinal periódico

Transformada de Fourier de sinais periódicos

Verifiquemos então que cada impulso no domínio da frequência é obtido por transformação de uma exponencial complexa no domínio do tempo.

Vamos demonstrá-lo recorrendo à transformada inversa de Fourier.

Sendo então, X(ω) um impulso localizado na frequência em ω_0, a sua representação será:

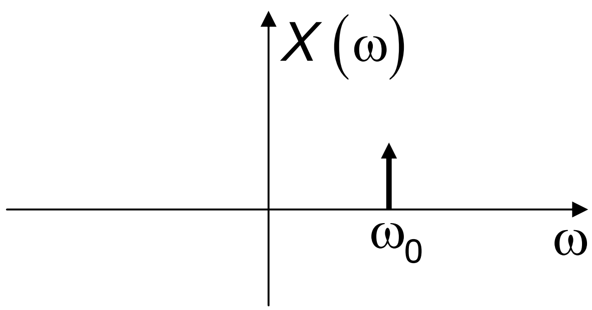
$$X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

O sinal que no domínio do tempo gera este impulso é determinado por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Leftrightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega \Leftrightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega_0 t}d\omega \Leftrightarrow$$



Transformada de Fourier de sinais periódicos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega_0 t}d\omega \Leftrightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)d\omega \Leftrightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

O que significa que:

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \quad \overset{F}{\rightarrow} \quad \delta(\omega-\omega_0)$$

ou de outra forma:

$$e^{j\omega_0 t} \quad \overset{F}{\rightarrow} \quad 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

como queríamos demonstrar.

Transformada de Fourier de sinais periódicos

$$e^{j\omega_0 t} \quad \overset{F}{\rightarrow} \quad 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Esta expressão indica que uma exponencial complexa (no tempo) com uma determinada frequência, tem como transformada de Fourier um impulso (na frequência) localizado nessa mesma frequência.

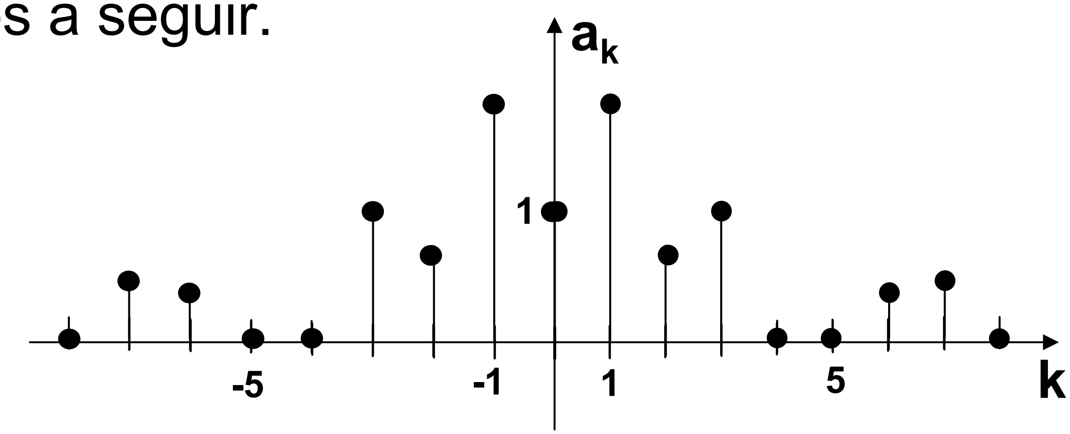
Então se considerarmos a série de Fourier de um sinal periódico, que não é mais do que interpretar o sinal como a soma de exponenciais complexas cada uma com uma dada frequência harmónica, a sua transformada será:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \overset{F}{\rightarrow} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

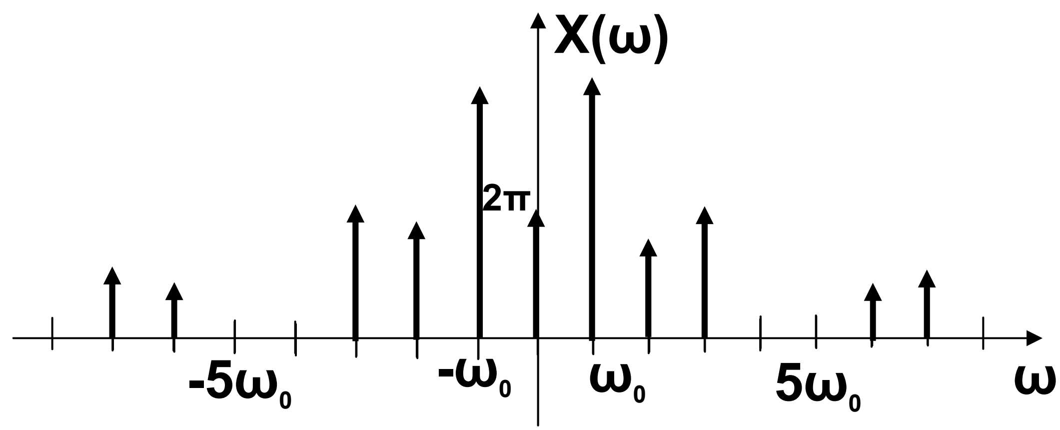
A **transformada de Fourier de um sinal periódico** é um pente de impulsos localizados nas frequências harmónicas, cada um deles com um peso igual ao produto do respectivo coeficiente espectral por 2π.

Transformada de Fourier de sinais periódicos

Se tivermos um sinal periódico cujos coeficientes espectrais sejam os ilustrados a seguir.

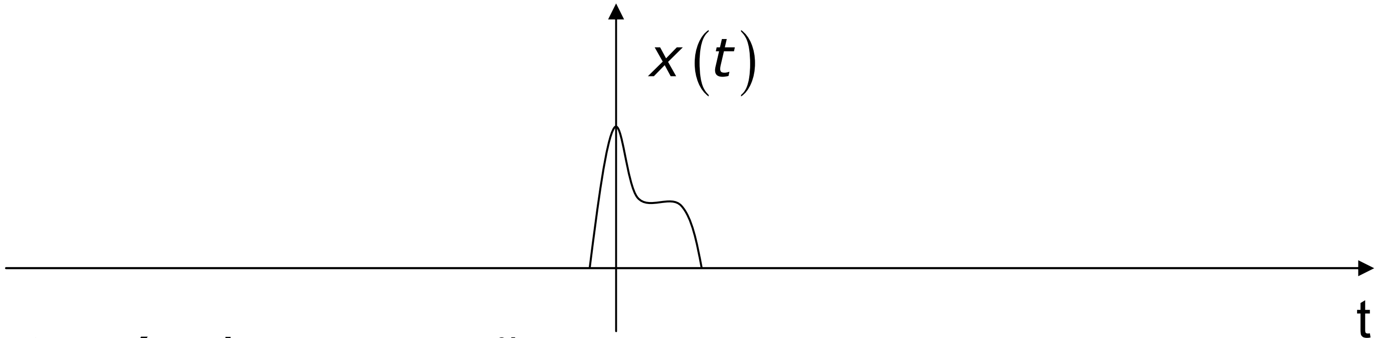


Determina-se imediatamente a transformada de Fourier como sendo:



Propriedades da transformada de Fourier

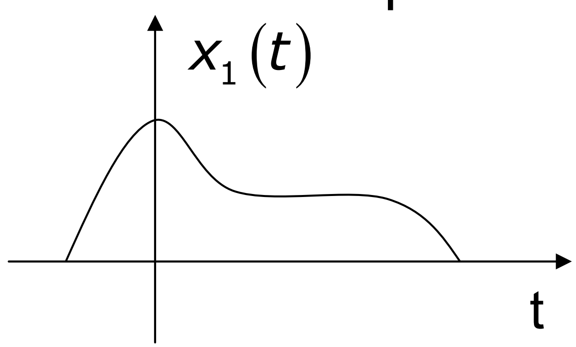
Considere-se calculada a transformada de Fourier do seguinte sinal:

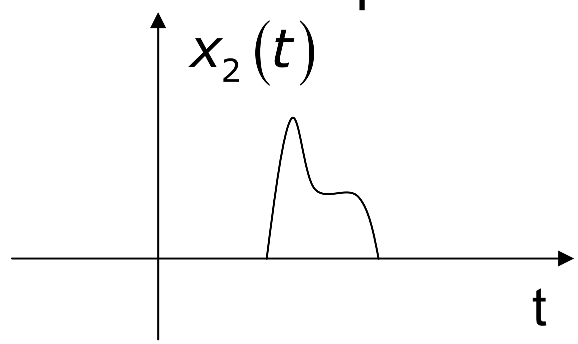


Obtida através da expressão:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Se pretendermos determinar as transformadas dos sinais seguintes, será necessário aplicar de novo esta expressão?





É nestas situações que se torna útil considerar as propriedades da transformada de Fourier.

Propriedades da transformada de Fourier

Linearidade:

Se:

$$x_1(t) \xrightarrow{F} X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \xrightarrow{F} X_2(\omega)$$

Então:

$$Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{F} AX_1(\omega) + BX_2(\omega)$$

Escalonamento temporal:

Se:

$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$$

Então:

$$x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

A compressão temporal de um sinal resulta numa expansão espectral e a expansão temporal resulta numa compressão espectral.

Este resultado é intuitivo pois se um sinal é comprimido no tempo, as frequências que o constituem tornam-se maiores. Assim, o seu espectro alarga-se de forma a conter essas frequências mais elevadas.

Propriedades da transformada de Fourier

Deslocamento temporal:

Se:

$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$$

Então:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{F} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Uma das consequências desta propriedade é que o deslocamento no tempo não altera a amplitude da sua transformada de Fourier.

O deslocamento de um sinal no tempo reflecte-se apenas na mudança de fase da sua transformada.

Propriedades da transformada de Fourier

Deslocamento espectral:

Se:

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega)$$

Então:

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$$

Propriedades da transformada de Fourier

Consequências da propriedade do deslocamento espectral:

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X(\omega - \omega_0)$$

Esta propriedade indica que se multiplicarmos um sinal por uma exponencial $e^{j\omega_0 t}$, o seu espectro se desloca ω_0 na frequência.

Dado que $e^{j\omega_0 t}$ não é uma função real, ou seja, não pode ser gerada, o deslocamento na frequência é vulgarmente conseguido pela multiplicação de x(t) por um coseno:

$$x(t)\cos(\omega_0 t) =$$

$$x(t)\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t)e^{-j\omega_0 t}\right)$$

Propriedades da transformada de Fourier

$$x(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t)e^{-j\omega_0 t}\right)$$

Já vimos que:

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$$

pelo que:

$$x(t)e^{j(-\omega_0)t} \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega + \omega_0)$$

então:

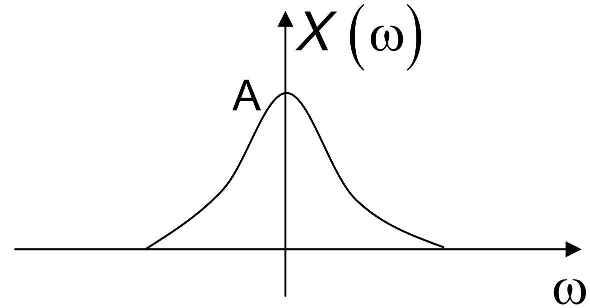
$$\frac{1}{2}\left(x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t)e^{j(-\omega_0)t}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\right]$$

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\right]$$

O que demonstra que a multiplicação de um sinal no tempo por um coseno de frequência ω_0 desloca o espectro $X(\omega)$ para ω_0 e $-\omega_0$.

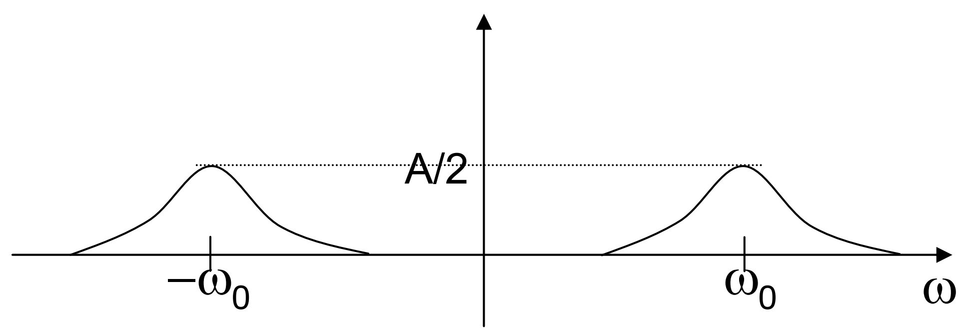
Propriedades da transformada de Fourier

A multiplicação de um sinal por uma sinusóide no tempo (modulação) tem naturalmente um efeito na representação do sinal em frequência.



$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega)$$

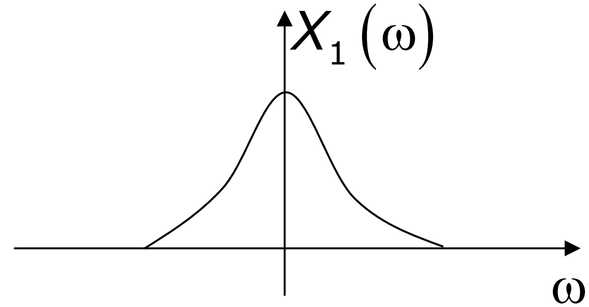
$$x(t)\cos(\omega_0 t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$



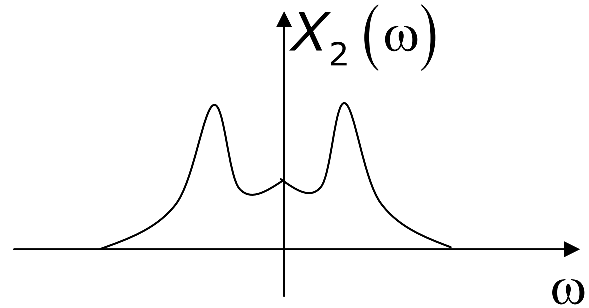
Aplicações da modulação:

Frequency division multiplexing (sinais transmitidos pelo mesmo canal); Antenas de dimensão da ordem do comprimento de onda do sinal; amplificação de sinais de baixa frequência (que necessitariam de condensadores de elevada capacidade).

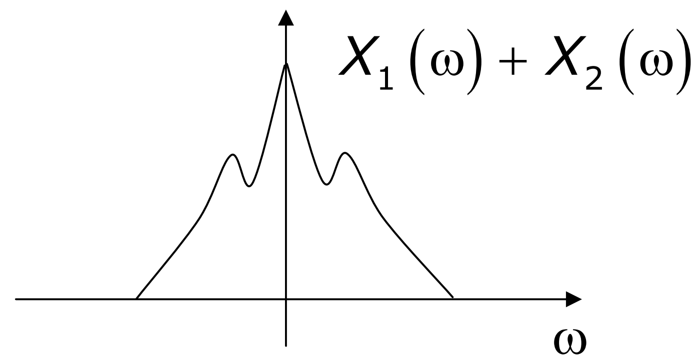
$$x_1(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} X_1(\omega)$$



$$x_2(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} X_2(\omega)$$



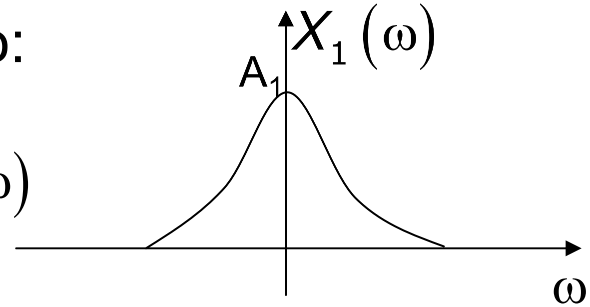
$$x_1(t) + x_2(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} X_1(\omega) + X_2(\omega)$$



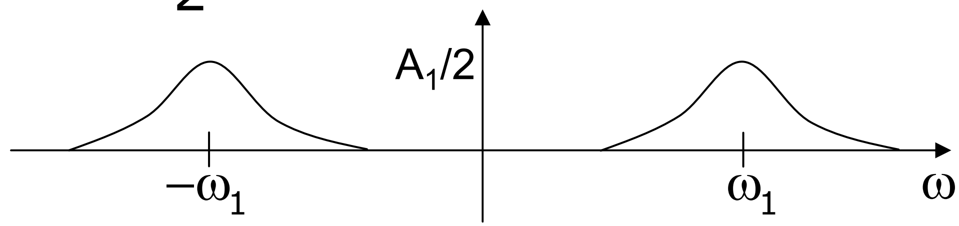
Depois da soma, não é possível voltar a extrair cada sinal separadamente.

Recorrendo a modulação:

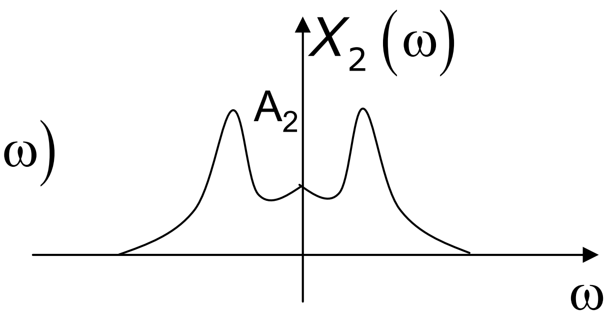
$$x_1(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(\omega)$$



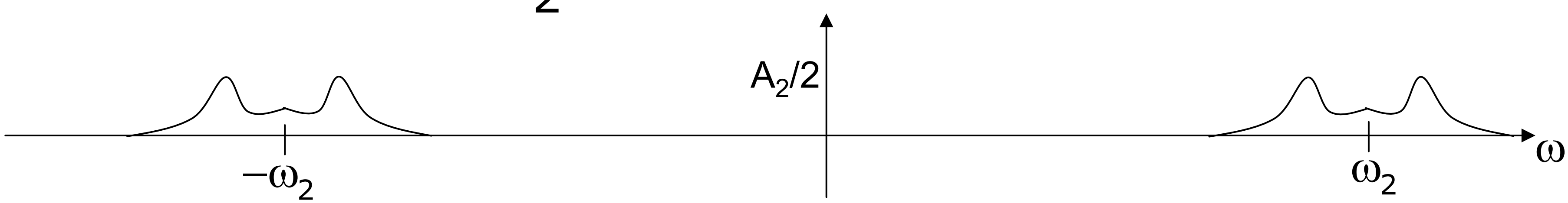
$$x_1(t)\cos(\omega_1 t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X_1(\omega-\omega_1)+X_1(\omega+\omega_1)\right]$$



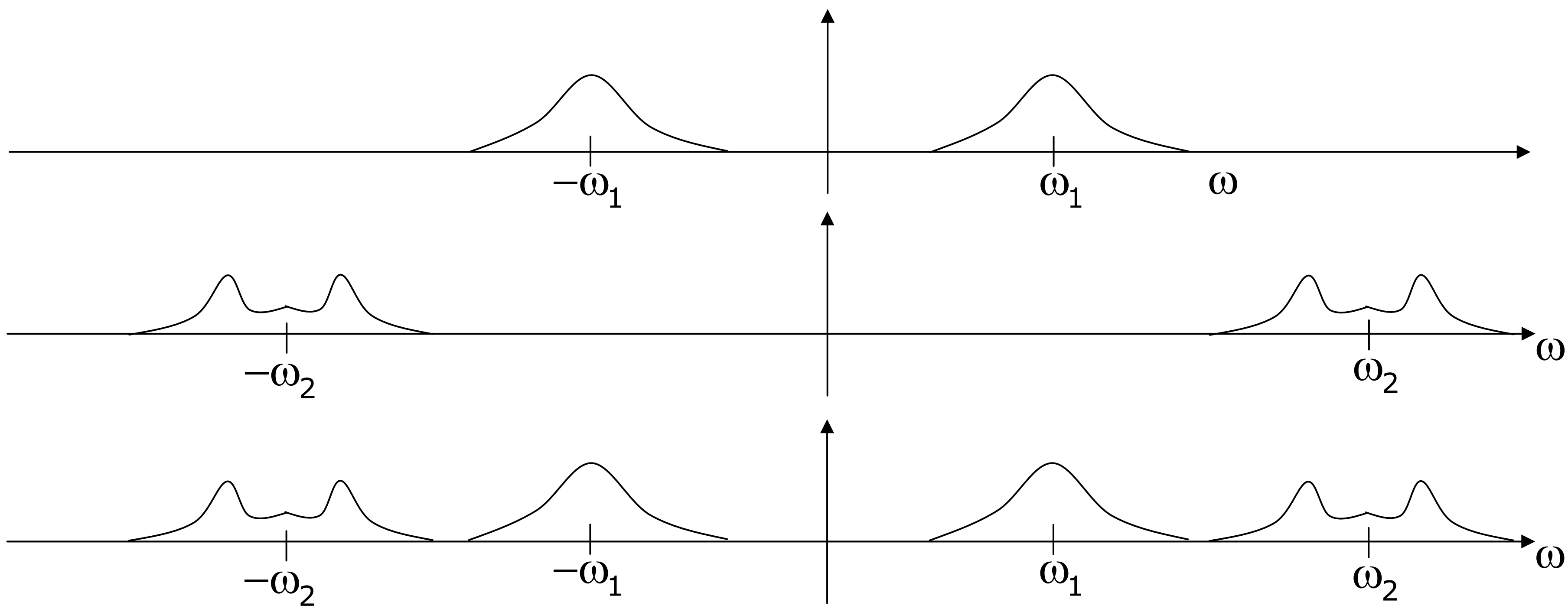
$$x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(\omega)$$



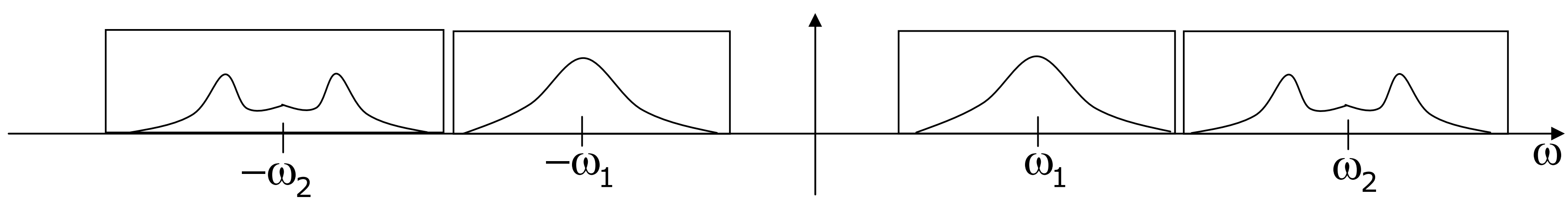
$$x_2(t)\cos(\omega_2 t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X_2(\omega-\omega_2)+X_2(\omega+\omega_2)\right]$$



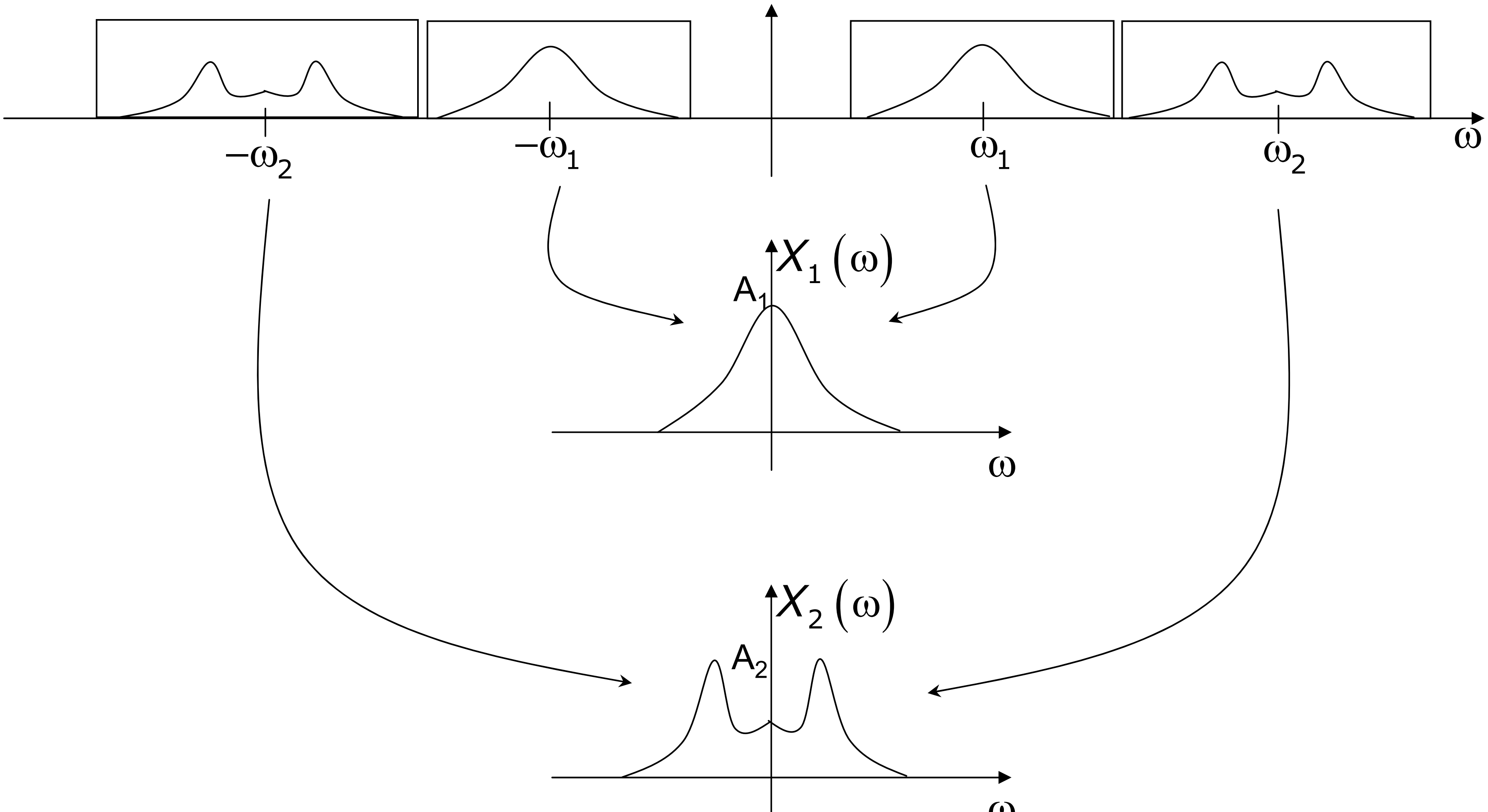
$$x_1(t)\cos(\omega_1 t) + x_2(t)\cos(\omega_2 t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\left[X_1(\omega-\omega_1) + X_1(\omega+\omega_1)\right] + \frac{1}{2}\left[X_2(\omega-\omega_2) + X_2(\omega+\omega_2)\right]$$

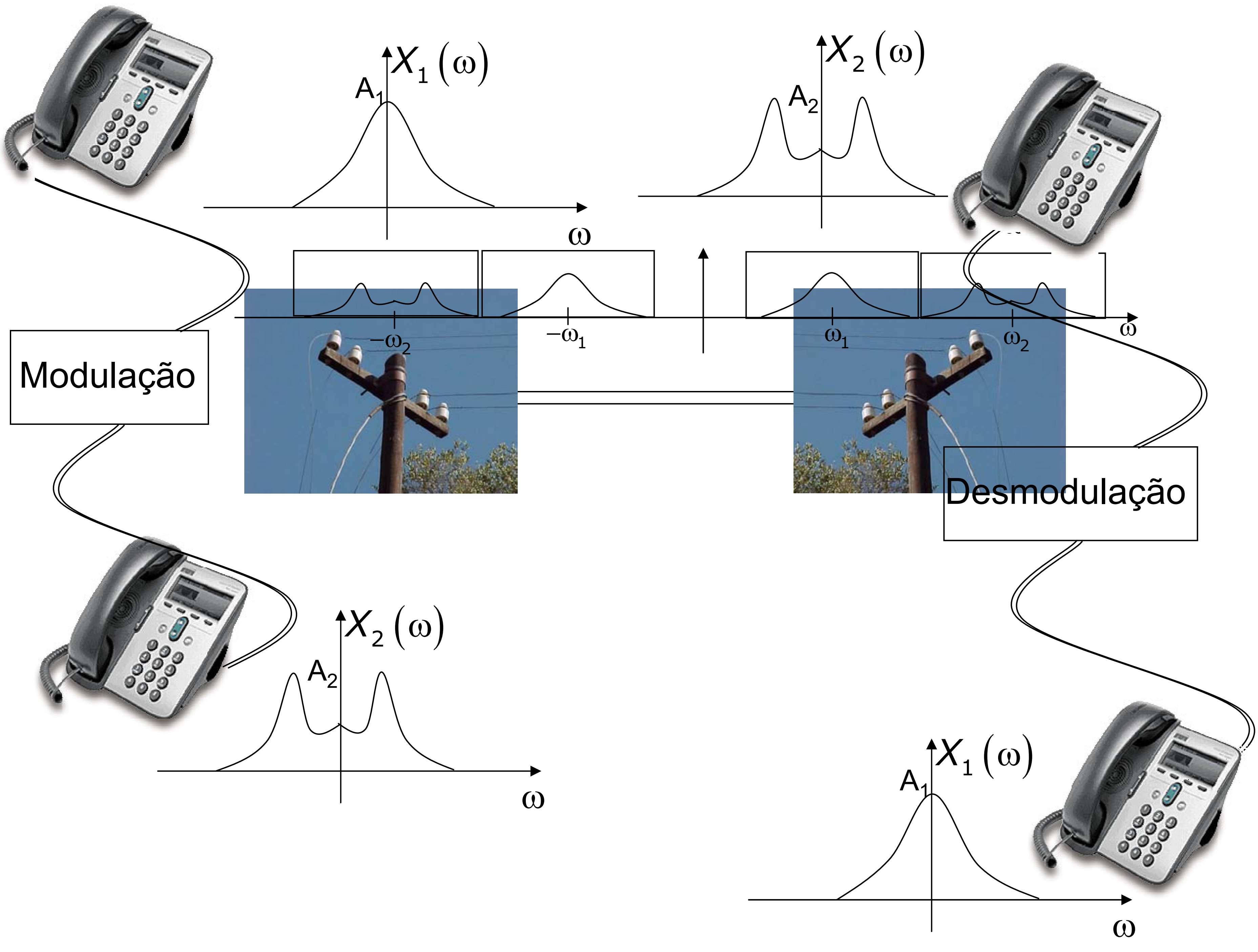


Dado que os sinais se encontram separados no domínio da frequência, é possível extraí-los separadamente usando filtragem.

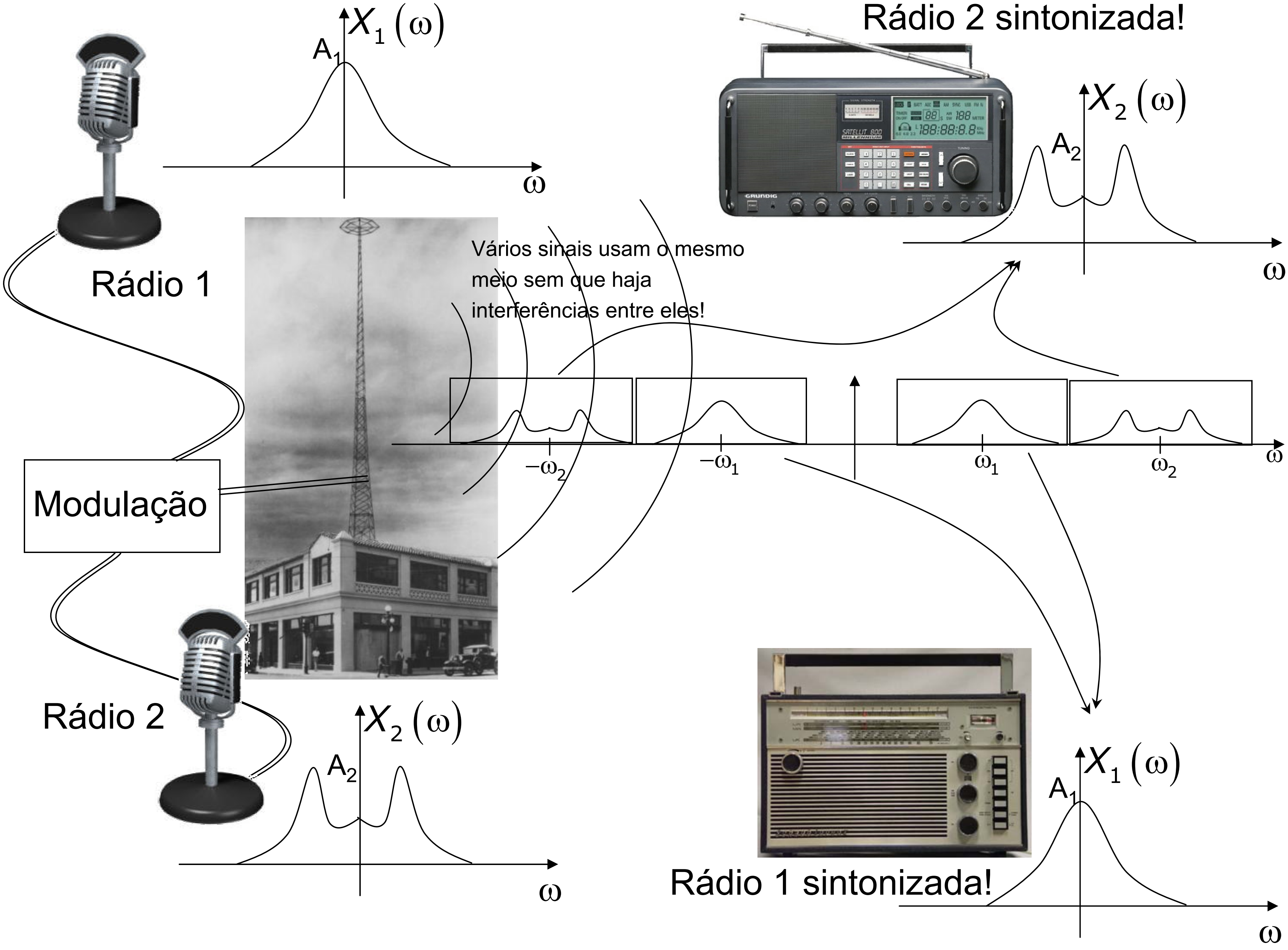


Por desmodulação é possível recuperar os sinais originais.





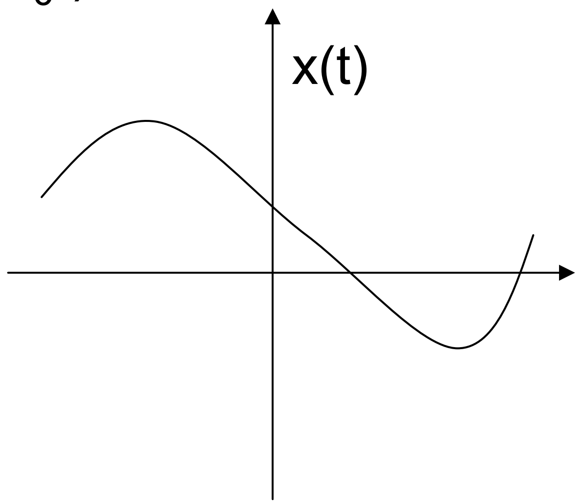
$X_1(\omega)$
A_1
ω
$X_2(\omega)$
A_2
$-\omega_2$
$-\omega_1$
ω_1
ω_2
ω
Modulação
Desmodulação
$X_2(\omega)$
A_2
ω
$X_1(\omega)$
A_1
ω

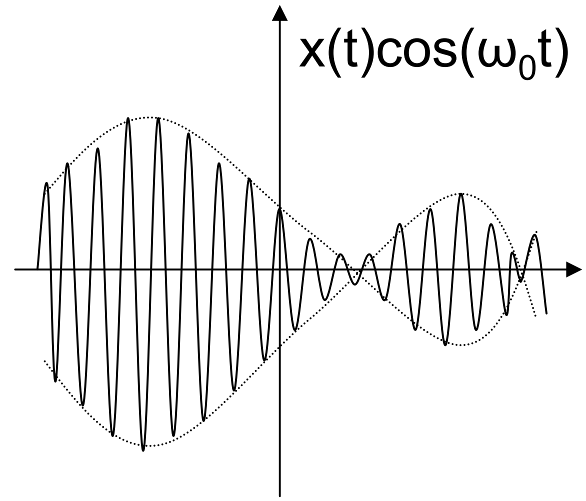


$X_1(\omega)$
A_1
ω
Rádio 1
Modulação
Rádio 2
$X_2(\omega)$
A_2
ω
Vários sinais usam o mesmo meio sem que haja interferências entre eles!
$-\omega_2$
$-\omega_1$
ω_1
ω_2
ω
Rádio 2 sintonizada!
$X_2(\omega)$
A_2
ω
Rádio 1 sintonizada!
$X_1(\omega)$
A_1
ω

Propriedades da transformada de Fourier

No domínio do tempo, a multiplicação de um coseno $\cos(\omega_0 t)$ por $x(t)$ faz com que modulemos com os valores de $x(t)$ a sinusóide $\cos(\omega_0 t)$:





O fenómeno descrito designa-se por **modulação**.

A sinusóide $\cos(\omega_0 t)$ chama-se **portadora**.

O sinal $x(t)$ é o sinal **modulador**.

O sinal $x(t)\cos(\omega_0 t)$ é o **sinal modulado**.

Propriedades da transformada de Fourier

Diferenciação e integração:

Se:

$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$$

Então:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

Esta é uma propriedade extremamente importante na medida em que se substitui uma diferenciação por uma multiplicação no domínio da frequência, e uma integração por uma divisão e uma soma no domínio da frequência.

Convolução:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Esta propriedade é extremamente importante pois mostra que a operação de **convolução no tempo** pode ser **substituída por** uma simples **multiplicação no domínio da frequência**.

Propriedades da Transformada de Fourier

Demonstração da propriedade da convolução:

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Pretendemos determinar *Y(ω)* que é dado por:

$$Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right)e^{-j\omega t}dt \Leftrightarrow$$

Mudando a ordem de integração

$$Y(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right)d\tau \Leftrightarrow$$

$$Y(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right)d\tau \Leftrightarrow$$

Propriedades da Transformada de Fourier

$$Y(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left(\underbrace{\int_{t=-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt}_{H(\omega)e^{-j\omega\tau}}\right)d\tau \Leftrightarrow$$

Pela propriedade do deslocamento no tempo

$$Y(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)H(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau \Leftrightarrow$$

$$Y(\omega) = H(\omega)\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \Leftrightarrow$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Portanto, como se pretendia demonstrar:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Análise de Fourier de sinais e sistemas discretos

As exponenciais complexas discretas são funções próprias de sistemas LIT (lineares e invariantes no tempo), ou seja:

Supondo que um sistema LIT com resposta a impulso h[k] tem como sinal de entrada:

$$x[k] = z^k$$ onde z é um complexo

$$x[k] = z^k \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y[k] = h[k] * x[k]$$

A saída do sistema pode ser determinada pela convolução discreta:

$$y[k] = h[k] * x[k] \Leftrightarrow$$

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] x[k-m] \Leftrightarrow$$

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z^{k-m} \Leftrightarrow$$

$$y[k] = z^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z^{-m}$$

Análise de Fourier de sinais e sistemas discretos

$$y[k] = z^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z^{-m}$$

Esta expressão mostra que se a entrada é uma exponencial complexa dada por

$$x[k] = z^k$$

Então a saída do sistema será dada por

$$y[k] = H(z) z^k$$

onde

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z^{-m}$$

Aqui H(z) é o valor próprio associado à função própria z^k.

Análise de Fourier de sinais e sistemas discretos

Aplicando a propriedade da linearidade dos sistemas discretos, se

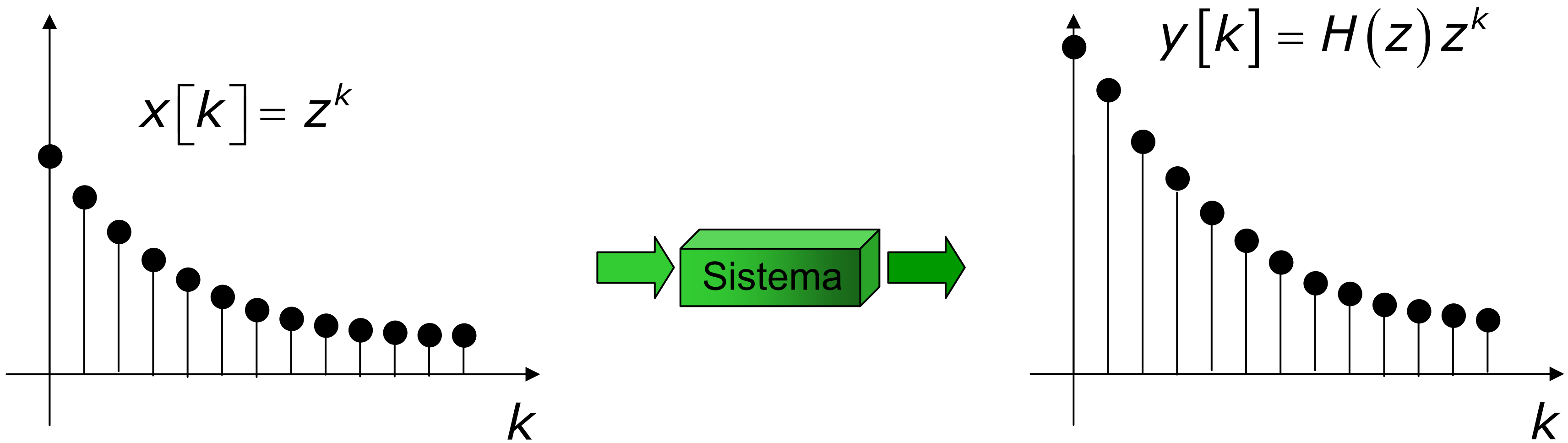
$$x[k] = z^k \;\Rightarrow\; \boxed{\text{Sistema}} \;\Rightarrow\; y[k] = H(z)\,z^k$$

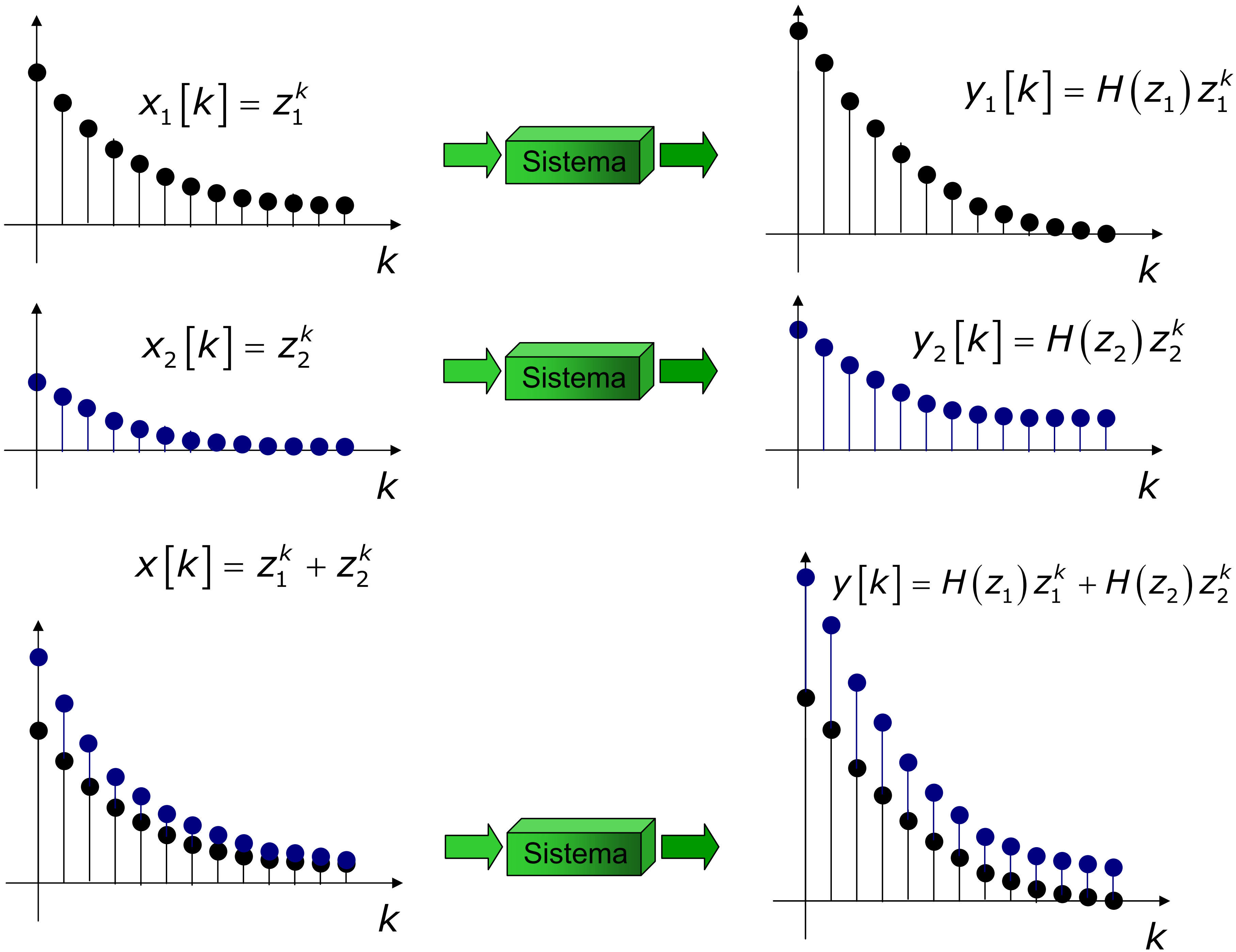
Então, se a entrada de um sistema discreto for representada como a combinação linear de exponenciais complexas, a resposta do sistema será imediatamente dada por:

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_n^k \;\Rightarrow\; \boxed{\text{Sistema}} \;\Rightarrow\; y[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H(z_n)\, z_n^k$$

Por outras palavras, a saída pode ser também representada como uma combinação linear das mesmas exponenciais complexas mas com um peso $a_n H(z_n)$.

Análise de Fourier de sinais e sistemas discretos





$x_1[k] = z_1^k$
Sistema
$y_1[k] = H(z_1)\, z_1^k$
k
$x_2[k] = z_2^k$
Sistema
$y_2[k] = H(z_2)\, z_2^k$
k
$x[k] = z_1^k + z_2^k$
Sistema
$y[k] = H(z_1)\, z_1^k + H(z_2)\, z_2^k$
k

Análise de Fourier de sinais e sistemas discretos

Verifica-se assim ser útil a representação de um sinal discreto enquanto soma de exponenciais discretas.

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_n^k$$

Um conjunto de exponenciais de particular interesse, tal como para os sistemas contínuos, são as exponenciais complexas.

$$z_n = e^{jn\Omega_0}$$

Daqui resulta que a representação do sinal discreto assume agora o formato:

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(e^{jn\Omega_0}\right)^k$$

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

Série de Fourier de tempo discreto

A série de Fourier discreta indica que um sinal discreto periódico pode ser obtido por soma de exponenciais complexas cada uma com um dado peso:

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

onde Ω_0 é a frequência angular e as exponenciais $e^{jn\Omega_0 k}$ têm frequências múltiplas de Ω_0, ou seja, são harmonicamente relacionadas.

Se designarmos por N o período de um sinal discreto periódico, então a frequência angular será dada por:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Os coeficientes $\boldsymbol{a_n}$ são designados por coeficientes espectrais da série de Fourier discreta.

Série de Fourier de tempo discreto

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

Uma diferença importante entre o caso contínuo e o caso discreto da série de Fourier, é que no caso contínuo, todas as exponenciais complexas de frequências múltiplas da fundamental são diferentes.

Para o caso discreto, exponenciais que difiram na frequência de um valor múltiplo de 2π, são na realidade a mesma exponencial.

$$e^{jn\Omega_0 k}\Big|_{n=n_0} = e^{jn_0\Omega_0 k}$$

$$e^{jn\Omega_0 k}\Big|_{n=n_0+rN} = e^{j(n_0+rN)\Omega_0 k} = e^{jn_0\Omega_0 k} e^{jrN\Omega_0 k} = e^{jn_0\Omega k} e^{jrN\frac{2\pi}{N}k} = e^{jn_0\Omega_0 k} e^{j2\pi rk} = e^{jn_0\Omega_0 k}$$

Série de Fourier de tempo discreto

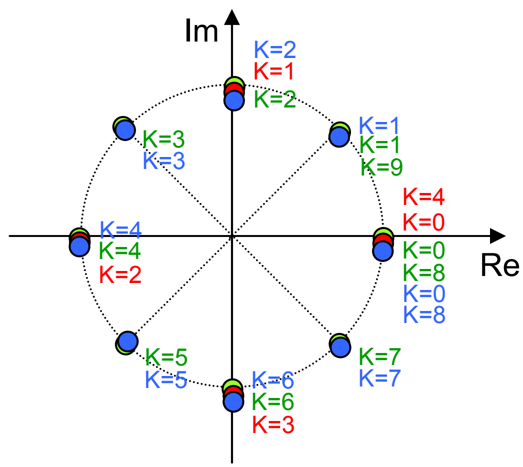
Consideremos a família de exponenciais harmonicamente relacionadas, de frequência fundamental π/4, ou seja, período fundamental 8: $e^{jn\frac{\pi}{4}k}$

n=1 $\quad e^{j\frac{\pi}{4}k}$

n=2 $\quad e^{j2\frac{\pi}{4}k} = e^{j\frac{\pi}{2}k}$

...

n=9 $\quad e^{j9\frac{\pi}{4}k}$



$$e^{j1\frac{\pi}{4}k} = e^{j(1+8)\frac{\pi}{4}k}$$

Claramente as exponenciais $e^{j\frac{\pi}{4}k}$ e $e^{j\frac{\pi}{2}k}$ são diferentes.

Vejamos o que acontece para a exponencial $e^{j9\frac{\pi}{4}k}$ (n=9=1+8).

Série de Fourier de tempo discreto

Sendo:

$$e^{jn_0\Omega_0 k} = e^{j(n_0+N)\Omega_0 k}$$

Conclui-se que apenas existe um conjunto de *N* exponenciais discretas diferentes harmonicamente relacionadas.

Assim, a representação de um sinal discreto pela sua série de Fourier, não necessita contemplar uma soma infinita de exponenciais pois apenas N delas são diferentes.

A expressão

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

assume portanto a forma:

$$x[k] = \sum_{n=<N>} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

O que indica que apenas temos de efectuar a soma para *N* quaisquer valores inteiros consecutivos de *n*.

Série de Fourier de tempo discreto

A série de Fourier de um sinal discreto é então dada por:

$$x[k] = \sum_{n=<N>} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

Os coeficientes $\boldsymbol{a_n}$ podem ser determinados a partir de uma expressão cuja dedução é semelhante ao caso contínuo. Essa expressão é:

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} x[k] e^{-jn\Omega_0 k}$$

A primeira expressão recebe a designação de **equação de síntese**.

A segunda expressão recebe a designação de **equação de análise**.

Transformada de Fourier de tempo discreto

Usando uma análise paralela à efectuada para sinais contínuos, pode ser determinada uma representação na frequência de **sinais aperiódicos**. Esta representação recebe a designação de **Transformada de Fourier**.

A expressão da transformada de Fourier de um sinal não é mais do que interpretá-lo como sendo obtido por soma de exponenciais complexas **sem uma relação harmónica entre elas**, cada uma com um dado peso X(Ω):

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega k} d\Omega$$

Notando que as exponenciais complexas discretas se repetem ao fim de um período de 2π, e que a transformada também tem essa periodicidade, esta expressão assume a forma simplificada de:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega k} d\Omega$$

Transformada de Fourier de tempo discreto

Transformada de Fourier:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega k} d\Omega$$

O peso X(Ω) de cada exponencial complexa na construção do sinal x[k] é dado pela expressão:

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\Omega k}$$

A primeira expressão recebe a designação de **Transformada Inversa de Fourier**.

A segunda expressão recebe a designação de **Transformada (Directa) de Fourier**.

Transformada de Fourier de tempo discreto para sinais periódicos

Foi já visto que a transformada de Fourier de um sinal periódico contínuo não era mais do que impulsos localizados nas frequências harmónicas da fundamental, com um peso proporcional aos coeficientes espectrais da sua série de Fourier.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \xrightarrow{F} \quad X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

Para sinais discretos o resultado é em tudo semelhante a este:

Sendo x[k] um sinal periódico com representação em série de Fourier:

$$x[k] = \sum_{n=<N>} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

A sua transformada de Fourier será dada por:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 2\pi\delta(\Omega - n\Omega_0)$$

Série e transformada de sinais contínuos e discretos

Sinais contínuos: | Sinais discretos:

Série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[k] = \sum_{n=<N>} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

Coeficientes espectrais:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[k] e^{-jn\Omega_0 k}$$

Transformada inversa de Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega k} d\Omega$$

Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\Omega k}$$

Transformada de Fourier de sinais periódicos:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\downarrow F$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x[k] = \sum_{n=<N>} a_n e^{jn\Omega_0 k}$$

$$\downarrow F$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 2\pi\delta(\Omega - n\Omega_0)$$

Questões??