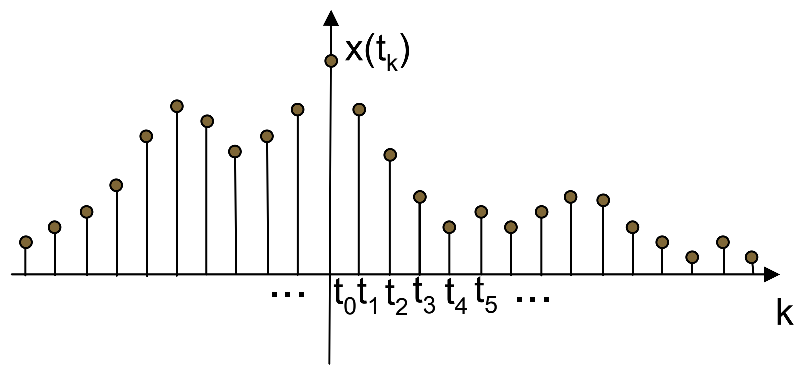
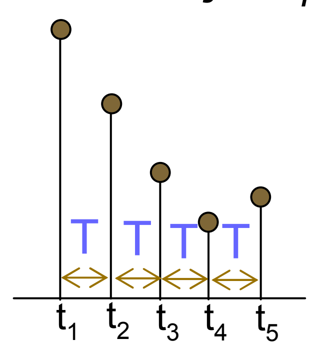
Sinais de Tempo Discreto

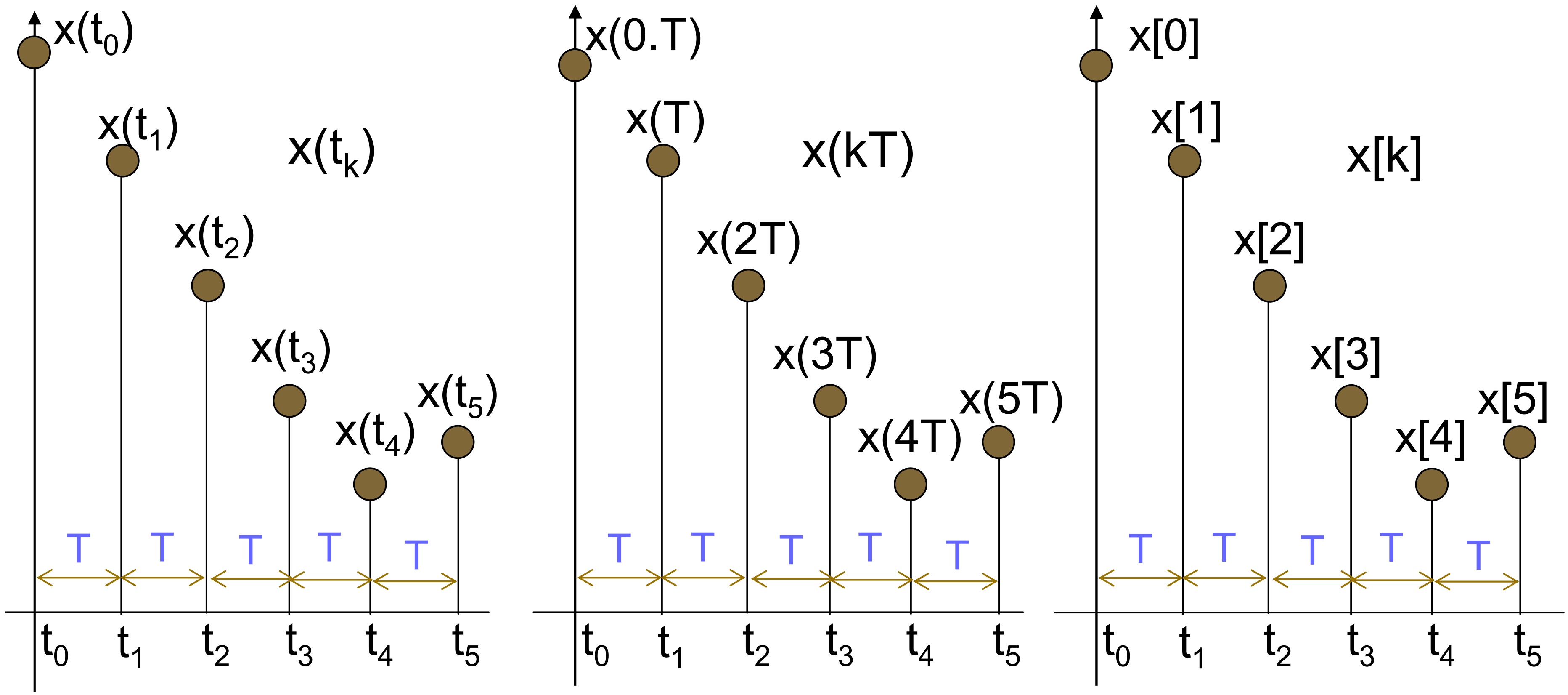
Sinais definidos em instantes discretos do tempo t_0, t_1, t_2, ..., t_k,... são sinais de tempo-discreto, denotados pelos símbolos $f(t_k)$, $x(t_k)$, $y(t_k)$... (sendo k um inteiro).



Assume-se que os intervalos de tempo discretos são uniformemente espaçados, ou seja, $t_{k+1} - t_k = T$ para todo o k.



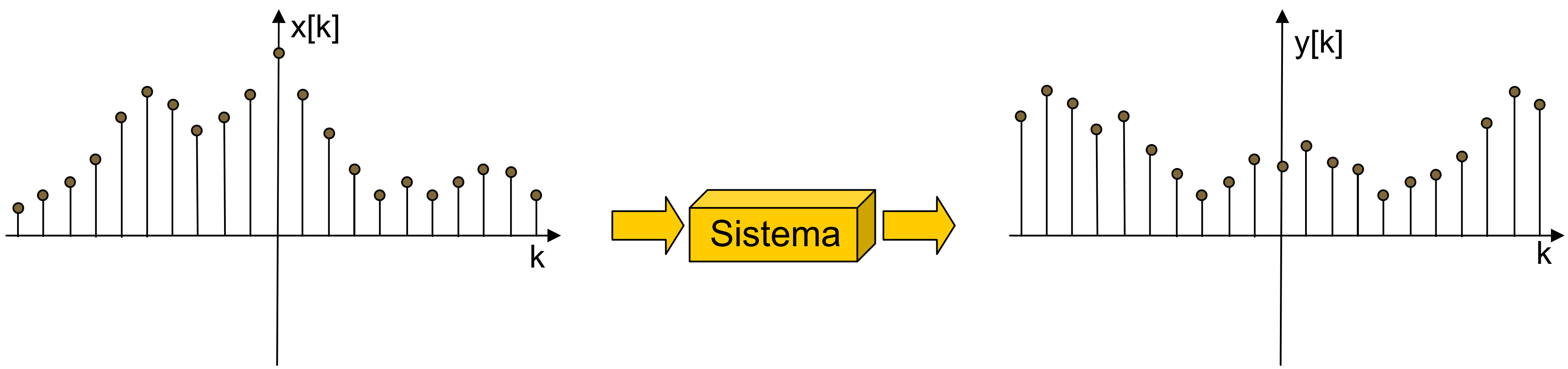
Representação de sinais discretos



Com espaçamento uniforme entre os instantes em que ocorre o sinal, o sinal pode ser denotado por *x(kT)*.

A notação pode ainda ser mais simplificada fazendo *x[k],* onde fica implícito que *x[k]=x(kT)* e que *k* é um inteiro.

Sistemas de tempo discreto



Um sistema discreto tem um sinal discreto como entrada e gera na sua saída um novo sinal discreto.

Exemplo de descrição analítica de um sistema de tempo discreto

Defina como um sistema discreto um modelo simples de balanço numa conta bancária de mês para mês.

Denote por y[k] o saldo no fim do k-ésimo mês, por x[k] o depósito líquido (depósitos menos levantamentos) durante o *k-ésimo* mês e assuma uma taxa de juro mensal de 1%.

Exemplo de descrição de sistema de tempo discreto

O resultado será: $y[k]-1.01y[k-1]=x[k]$

Transformando a equação do sistema para um formato genérico:

$$y[k]-ay[k-1]=bx[k]$$

Vê-se então que podemos caracterizar um sistema discreto por uma equação na forma mais genérica de:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y\left[k-n\right]=\sum_{n=0}^{M} b_n x\left[k-n\right]$$

onde a_n e b_n são constantes conhecidas

Esta equação recebe o nome de **equação às diferenças**. Este nome surge devido ao modo como a descrição de um sistema discreto assume a forma de diferenças entre os valores dos sinais em diferentes instantes.

Expansão dos membros da equação

Expandindo a expressão, obtém-se:

$$y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \ldots + a_1 y[k-n+1] + a_0 y[k-n] =$$
$$b_n x[k] + b_{n-1}x[k-1] + \ldots + b_1 x[k-n+1] + b_0 x[k-n]$$

O primeiro membro da equação consiste da saída em instantes k, k-1, k-2, ..., k-n, etc. O segundo membro consiste na entrada em instantes k, k-1, k-2, ..., k-n, etc.
Cada valor de saída e cada valor de entrada é pesado com um coeficiente.

Equação às diferenças em avanço ou em atraso

Uma equação às diferenças pode ser escrita em dois formatos: o primeiro usa **termos de atraso** como y[k-1], x[k-1], x[k-2],..., etc; o segundo usa **termos em avanço** como y[k+1], y[k+3],...,etc.
A equação seguinte está escrita em operador avanço:

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \ldots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] =$$
$$b_n x[k+n] + b_{n-1}x[k+n-1] + \ldots + b_1 x[k+1] + b_0 x[k]$$

A mesma equação é representada em operador atraso como:

$$y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \ldots + a_1 y[k-n+1] + a_0 y[k-n] =$$
$$b_n x[k] + b_{n-1}x[k-1] + \ldots + b_1 x[k-n+1] + b_0 x[k-n]$$

Condições iniciais e solução iterativa da equação às diferenças

$$y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \ldots + a_1 y[k-n+1] + a_0 y[k-n] =$$
$$b_n x[k] + b_{n-1}x[k-1] + \ldots + b_1 x[k-n+1] + b_0 x[k-n]$$

A equação anterior pode ser expressa como:

$$y[k] = -a_{n-1}y[k-1] - a_{n-2}y[k-2] - \ldots - a_1 y[k-n+1] - a_0 y[k-n]$$
$$+ b_n x[k] + b_{n-1}x[k-1] + \ldots + b_1 x[k-n+1] + b_0 x[k-n]$$

Esta equação mostra que y[k], a saída no instante k, é obtida a partir de 2n+1 elementos de informação. Estes são os n passados valores da saída: y[k-1], y[k-2],...y[k-n] e o presente e passados n valores da entrada: x[k], x[k-1], x[k-2], ...,x[k-n].
Conhecendo as condições iniciais e a entrada x[k], podemos calcular de forma iterativa a resposta y[0], y[1], y[2],etc.
Este método basicamente reflecte a forma como um computador resolveria uma equação às diferenças, conhecendo a entrada e as condições iniciais.

Exemplo de solução iterativa

Resolva iterativamente

$$y[k] - 0.5y[k-1] = x[k]$$

com as condições iniciais y[-1]=16 e a entrada $x[k]=k^2u[k]$.

Esta equação pode ser expressa na forma:

$$y[k] = 0.5y[k-1] + x[k]$$

Onde se coloca em evidência o facto de a saída num dado instante depender da saída nos instantes anteriores e da entrada nesse mesmo instante e nos anteriores.

Se fizermos *k=0* nesta equação, obtém-se

$$\begin{aligned} y[0] &= 0.5y[-1] + x[0] \\ &= 0.5 \bullet 16 + 0 = 8 \end{aligned}$$

Exemplo de solução iterativa

$$y[k] = 0.5y[k-1] + x[k]$$

Fazendo *k=1* e utilizando o valor de y[0]=8 (calculado na primeira iteração):

$$\begin{aligned} y[1] &= 0.5y[0] + x[1] \\ &= 0.5 \bullet 8 + 1 = 5 \end{aligned}$$

Fazendo agora *k=2* e utilizando o valor de y[1]=5 (calculado na segunda iteração):

$$\begin{aligned} y[2] &= 0.5y[1] + x[2] \\ &= 0.5 \bullet 5 + 4 = 6.5 \end{aligned}$$

Continuando este procedimento iterativamente:

$$y[3] = 0.5 \bullet 6.5 + 3^2 = 12.25$$

$$y[4] = 0.5 \bullet 12.25 + 4^2 = 22.125$$

Resposta do sistema

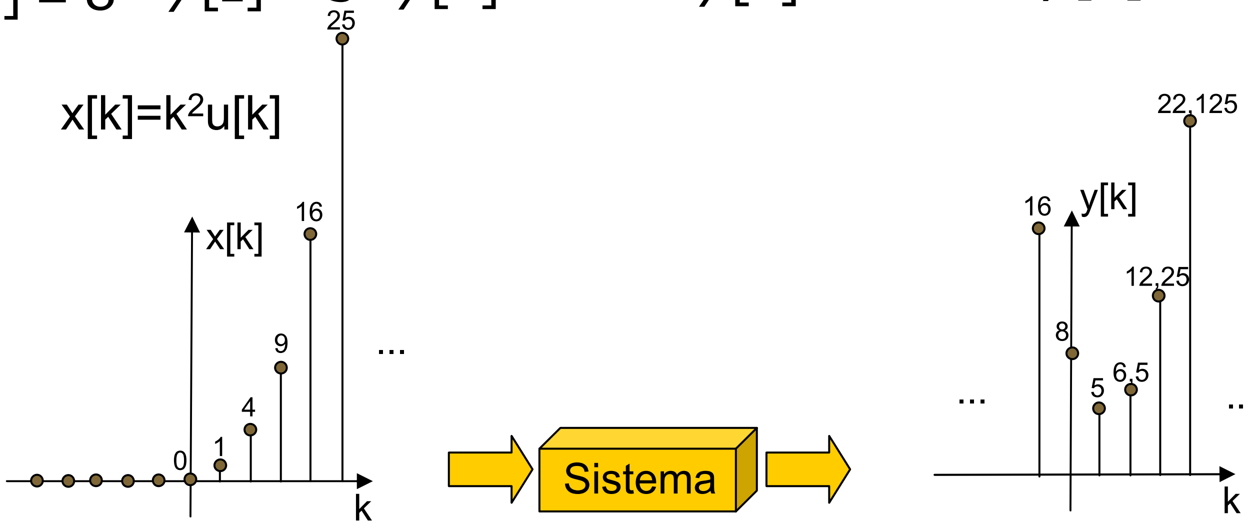
Conclui-se portanto que, para um sistema descrito pela equação às diferenças:

$$y[k] - 0.5y[k-1] = x[k]$$

com a entrada x[k]=k^{2}u[k], com as condições iniciais y[-1]=16

A resposta calculada iterativamente é dada por:

$$y[0] = 8 \quad y[1] = 5 \quad y[2] = 6.5 \quad y[3] = 12.25 \quad y[4] = 22.125$$



Notação do operador *E*

Nas equações às diferenças é conveniente o uso de notação de operador semelhante à usada nas equações diferenciais.

Em **sistemas de tempo-contínuo** foi usado o **operador D** para denotar a operação de diferenciação.

Para **sistemas de tempo-discreto** usar-se-á o **operador E** para denotar a operação de avançar a sequência um intervalo de tempo. Então:

$$f[k+1] = Ef[k]$$

$$f[k+2] = E^2 f[k]$$

$$\cdots$$

$$f[k+n] = E^n f[k]$$

Tendo uma equação às diferenças de primeira ordem na forma:

$$y[k+1] - \gamma y[k] = x[k+1]$$

Utilizando a notação de operador, esta equação pode ser expressa como:

$$Ey[k] - \gamma y[k] = Ex[k]$$

ou

$$(E - \gamma)y[k] = Ex[k]$$

Notação do operador *E*

Uma equação às diferenças de segunda ordem, como por exemplo:

$$y[k+2] + \frac{1}{4}y[k+1] + \frac{1}{16}y[k] = x[k+2]$$

poderá ser escrita na forma:

$$\left(E^2 + \frac{1}{4}E + \frac{1}{16}\right)y[k] = E^2x[k]$$

Uma forma geral para equações às diferenças de ordem n será:

$a_n = 1$

$$\left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1E + a_0\right)y[k] = \left(b_nE^n + b_{n-1}E^{n-1} + \ldots + b_1E + b_0\right)x[k]$$

ou de forma mais compacta:

$$Q[E]y[k] = P[E]x[k]$$

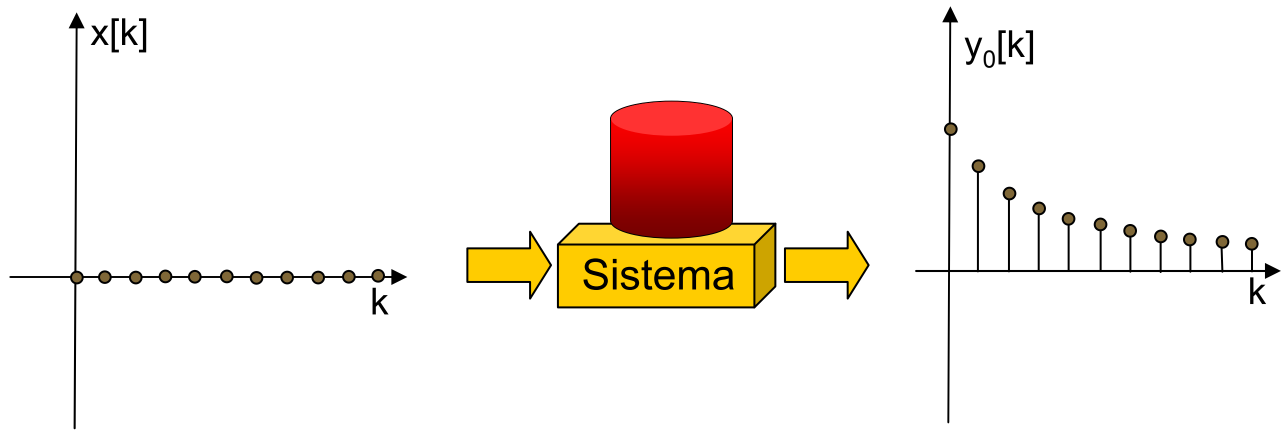
onde Q[E] e P[E] são polinómios no operador E de ordem n:

$$Q[E] = E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1E + a_0$$

$$P[E] = b_nE^n + b_{n-1}E^{n-1} + \ldots + b_1E + b_0$$

Resposta a entrada-nula de um sistema discreto

Um sistema discreto pode eventualmente apresentar um sinal de saída, mesmo não tendo uma entrada não-nula aplicada:



Esta situação pode ser descrita analiticamente por:

$$Q[E]y[k] = P[E]x[k]$$

onde x[k]=0, e y[k] recebe a desginação y_0[k] ou seja:

$$Q[E]y_0[k] = 0$$

De forma equivalente (expandindo o polinómio Q[E]):

$$\left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1E + a_0\right)y_0[k] = 0$$

Caso de primeira ordem

$$\left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1E + a_0\right)y_0[k] = 0$$

Para o caso de primeira ordem:

$a_n=a_1=1$

$$(E + a_0)y_0[k] = 0 \Leftrightarrow$$

$$y_0[k+1] + a_0y_0[k] = 0$$

ou

$$y_0[k+1] = -a_0y_0[k]$$

que conduz a

$$\frac{y_0[k+1]}{y_0[k]} = -a_0 = \gamma$$

Isto significa que a razão entre $y_0[k+1]$ e $y_0[k]$ é $\gamma=-a_0$. Claramente a sequência $y_0[k]$ é uma **progressão geométrica de razão** γ. Assim, $y_0[0]=c$ $y_0[1]=c\gamma$ $y_0[2]=c\gamma^2$ $y_0[3]=c\gamma^3$ e generalizando

$$y_0[k]=c\gamma^k$$

onde c é uma constante arbitrária a ser determinada por restrições adicionais, geralmente condições iniciais.

Caso de ordem N

A resposta a entrada nula de um sistema de ordem n é obtida resolvendo

$$\left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1E + a_0\right)y_0[k] = 0$$

desta equação obtém-se o polinómio Q[E]:

$$Q[E] = E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1E + a_0$$

que facilmente se converte em Q[γ], **polinómio característico**:

$$Q[\gamma] = \gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots + a_1\gamma + a_0$$

O polinómio anterior é de ordem n e pode ser expresso na sua forma factorizada (assumindo raízes distintas):

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\ldots(\gamma - \gamma_n)$$

Caso de ordem N

Resolvendo a equação característica

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\ldots(\gamma - \gamma_n) = 0$$

Verifica-se que γ tem n soluções γ_1, γ_2,..., γ_n que a verificam e consequentemente também a equação

$$\left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1 E + a_0\right) y_0[k] = 0$$

terá *n* soluções designados por **modos característicos**.

$$\gamma_1^k, \gamma_2^k, \ldots, \gamma_n^k$$

A solução geral é uma combinação linear destas *n* soluções.

$$y_0[k] = c_1\gamma_1^k + c_2\gamma_2^k + \ldots + c_n\gamma_n^k$$

As constantes c_1,c_2,...,c_n são constantes arbitrárias determinadas por *n* condições auxiliares, geralmente dadas na forma de condições iniciais.

Caso de ordem N

O polinómio $Q[\gamma]$ é o **polinómio característico** do sistema.
$Q[\gamma]=0$ designa-se por **equação característica** do sistema.

γ_1, γ_2,..., γ_n são as **raízes características do sistema** (ou valores próprios do sistema).

As exponenciais

$$\gamma_i^k \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

são os **modos característicos** ou **modos naturais** do sistema.
Existe um modo característico por cada raiz característica do sistema, e a resposta a entrada-nula é uma combinação linear dos modos característicos do sistema:

$$y_0[k] = c_1\gamma_1^k + c_2\gamma_2^k + \ldots + c_n\gamma_n^k$$

Qual a configuração de cada modo característico?

Raízes múltiplas

Se duas ou mais raízes coincidem (raízes repetidas), a forma dos modos característicos vem modificada.

Se uma raiz γ se repete r vezes (raiz de multiplicidade r), os modos característicos correspondentes a esta raiz são:

$$\gamma^k, k\gamma^k, k^2\gamma^k, \ldots, k^{r-1}\gamma^k$$

Então, se a equação característica de um sistema é

$$Q[\gamma] = (\gamma - \gamma_1)^r (\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2})\ldots(\gamma - \gamma_n)$$

a resposta a entrada-nula será uma combinação linear de modos associados a raízes simples e de modos associados à raiz de multiplicidade *r*.

$$y_0[k] = \left(c_1 + c_2 k + c_3 k^2 + \ldots + c_r k^{r-1}\right)\gamma_1^k + c_{r+1}\gamma_{r+1}^k + c_{r+2}\gamma_{r+2}^k + \ldots + c_n\gamma_n^k$$

Raízes complexas

No caso de as raízes características calculadas resultarem complexas, o tipo de análise a ser desenvolvido é próximo do que acontece para sistemas contínuos.

Caso se obtenham as raízes:

$$\gamma = \alpha + j\beta \vee \gamma = \alpha - j\beta$$

Dado tratarem-se de raízes simples (apesar de complexas), os modos associados serão:

$$(\alpha + j\beta)^k \quad \text{e} \quad (\alpha - j\beta)^k$$

Por uma questão de comodidade, as raízes serão convertidas na sua forma polar (isto é útil dado estarmos a tratar de complexos elevados a uma variável k):

$$\gamma = (\alpha + j\beta) = |\gamma| e^{j\angle\gamma}$$
$$\gamma = (\alpha - j\beta) = |\gamma| e^{-j\angle\gamma}$$

Apresentando portanto os modos característicos a forma:

$$\left(|\gamma| e^{j\angle\gamma}\right)^k \quad \text{e} \quad \left(|\gamma| e^{-j\angle\gamma}\right)^k$$

Raízes complexas

Sendo os modos característicos dados por:

$$\left(|\gamma| e^{j\angle\gamma}\right)^k \quad \text{e} \quad \left(|\gamma| e^{-j\angle\gamma}\right)^k$$

A resposa a entrada-nula será dada pela sua combinação linear:

$$y_0[k] = c_1 \left(|\gamma| e^{j\angle\gamma}\right)^k + c_2 \left(|\gamma| e^{-j\angle\gamma}\right)^k$$

Como foi já visto para o caso contínuo, os coeficientes c_1 e c_2 devem ser conjugados para que a resposta seja real, ou seja:

$$c_1 = c_2^* \Leftrightarrow$$

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \;,\; c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

A resposta a entrada-nula atinge assim a forma:

$$y_0[k] = \frac{c}{2} e^{j\theta} \left(|\gamma| e^{j\angle\gamma}\right)^k + \frac{c}{2} e^{-j\theta} \left(|\gamma| e^{-j\angle\gamma}\right)^k$$

Raízes complexas

A dedução da resposta a entrada-nula até à sua forma real será:

$$y_0[k] = c/2\, e^{j\theta}\left(|\gamma| e^{j\angle\gamma}\right)^k + c/2\, e^{-j\theta}\left(|\gamma| e^{-j\angle\gamma}\right)^k \Leftrightarrow$$

$$y_0[k] = c/2\left[e^{j\theta}\left(|\gamma| e^{j\angle\gamma}\right)^k + e^{-j\theta}\left(|\gamma| e^{-j\angle\gamma}\right)^k\right] \Leftrightarrow$$

$$y_0[k] = c/2\left[e^{j\theta}|\gamma|^k e^{j\angle\gamma k} + e^{-j\theta}|\gamma|^k e^{-j\angle\gamma k}\right] \Leftrightarrow$$

$$y_0[k] = c/2\left[\left(|\gamma|^k e^{j\theta + j\angle\gamma k}\right) + \left(|\gamma|^k e^{-j\theta - j\angle\gamma k}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$y_0[k] = c/2\, |\gamma|^k \left[e^{j\theta + jk\angle\gamma} + e^{-j\theta - jk\angle\gamma}\right] \Leftrightarrow$$

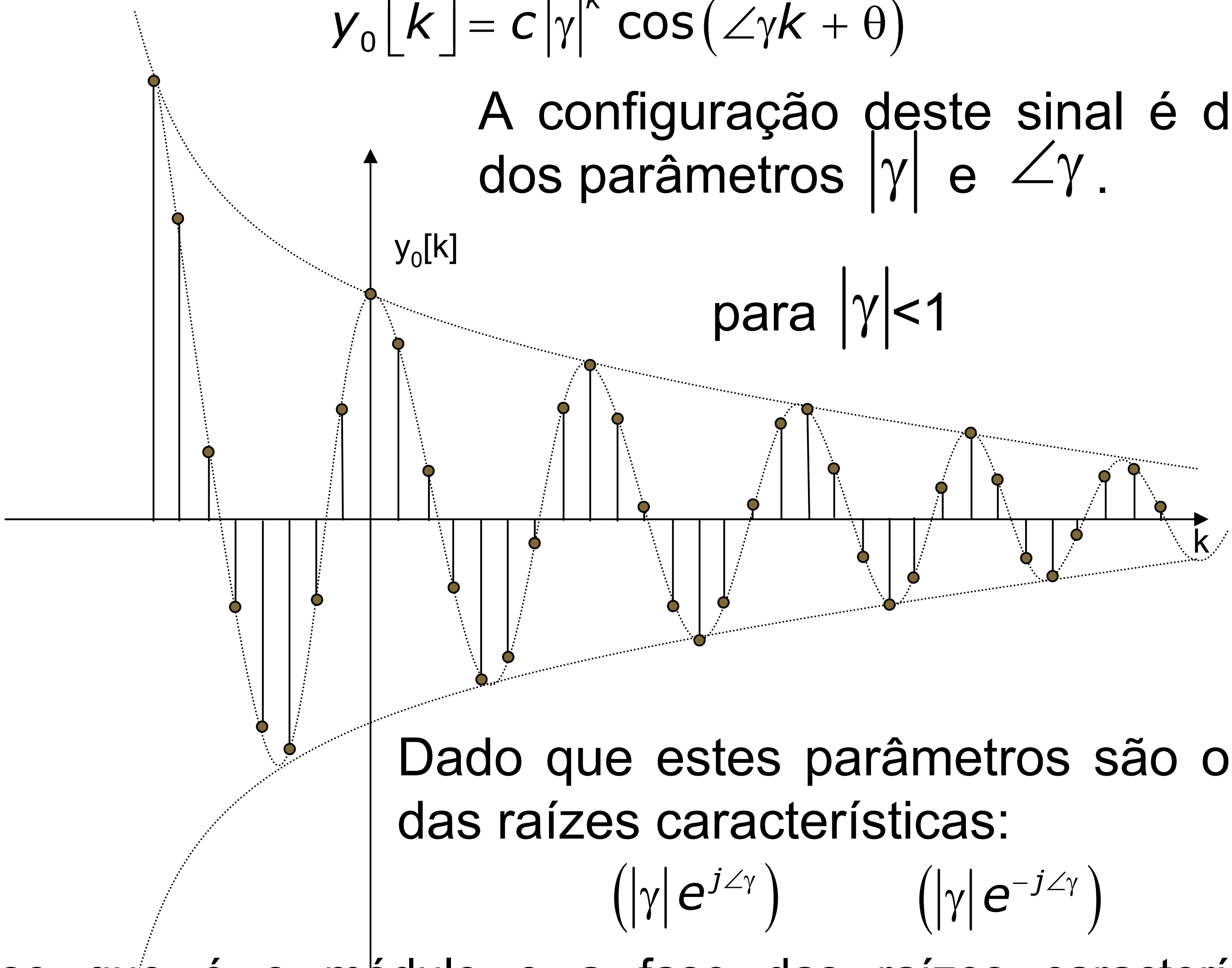
$$y_0[k] = c|\gamma|^k \underbrace{1/2\left[e^{j(\theta + k\angle\gamma)} + e^{-j(\theta + k\angle\gamma)}\right]} \Leftrightarrow$$

$$y_0[k] = c|\gamma|^k \cos(\angle\gamma k + \theta)$$

Resposta a entrada-nula

$$y_0[k] = c|\gamma|^k \cos(\angle\gamma k + \theta)$$

A configuração deste sinal é dependente dos parâmetros $|\gamma|$ e $\angle\gamma$.



para $|\gamma|<1$

Dado que estes parâmetros são originários das raízes características:

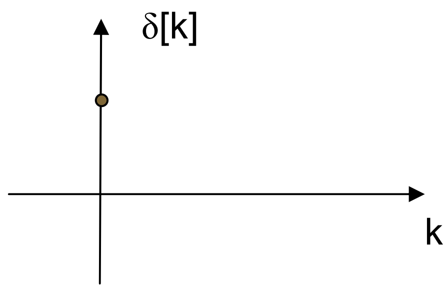
$$\left(|\gamma| e^{j\angle\gamma}\right) \qquad \left(|\gamma| e^{-j\angle\gamma}\right)$$

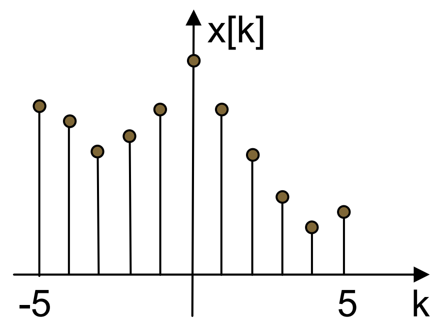
Conclui-se que é o módulo e a fase das raízes características que determinam a taxa de crescimento ou queda e a frequência deste sinal

Resposta a estado-nulo

Vimos já como calcular a resposta a entrada-nula de um sistema. Resta então saber de que forma se determina a resposta a uma entrada qualquer – **resposta a estado-nulo**.

Qualquer sinal discreto pode ser interpretado como sendo uma soma de impulsos deslocados no tempo.

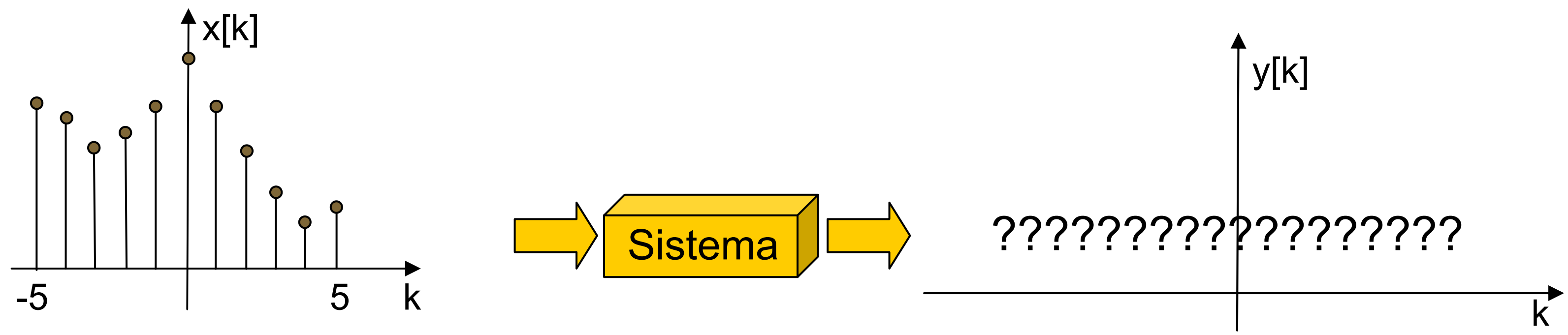




$$x[k] = x[-5]\delta[k+5] + x[-4]\delta[k+4] + x[-3]\delta[k+3] + x[-2]\delta[k+2] + x[-1]\delta[k+1] + x[0]\delta[k]$$
$$+ x[1]\delta[k-1] + x[2]\delta[k-2] + x[3]\delta[k-3] + x[4]\delta[k-4] + x[5]\delta[k-5]$$

Resposta a estado-nulo

Interpretando um sinal de entrada como sendo uma sequência de impulsos, a tarefa de determinar a resposta a esse sinal de entrada, é equivalente à de determinar a resposta a uma soma de impulsos deslocados no tempo.



Sendo x[k] dado por:

$$x[k] = x[-5]\delta[k+5] + x[-4]\delta[k+4] + x[-3]\delta[k+3] + x[-2]\delta[k+2] + x[-1]\delta[k+1] + x[0]\delta[k]$$
$$+ x[1]\delta[k-1] + x[2]\delta[k-2] + x[3]\delta[k-3] + x[4]\delta[k-4] + x[5]\delta[k-5]$$

Pela linearidade e pela invariância temporal do sistema, a resposta a estado-nulo para esta entrada será:

$$y[k] = x[-5]h[k+5] + x[-4]h[k+4] + x[-3]h[k+3] + x[-2]h[k+2] + x[-1]h[k+1] + x[0]h[k]$$
$$+ x[1]h[k-1] + x[2]h[k-2] + x[3]h[k-3] + x[4]h[k-4] + x[5]h[k-5]$$

Resposta a estado-nulo

$x[k] = x[-5]\delta[k+5] + x[-4]\delta[k+4] + x[-3]\delta[k+3] + x[-2]\delta[k+2] + x[-1]\delta[k+1] + x[0]\delta[k]$

$+ x[1]\delta[k-1] + x[2]\delta[k-2] + x[3]\delta[k-3] + x[4]\delta[k-4] + x[5]\delta[k-5]$

$y[k] = x[-5]h[k+5] + x[-4]h[k+4] + x[-3]h[k+3] + x[-2]h[k+2] + x[-1]h[k+1] + x[0]h[k]$

$+ x[1]h[k-1] + x[2]h[k-2] + x[3]h[k-3] + x[4]h[k-4] + x[5]h[k-5]$

Generalizando as expressões anteriores para um sinal qualquer, o que se verifica é que se interpretarmos um sinal de entrada como sendo:

$$x[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot \delta[k-m]$$

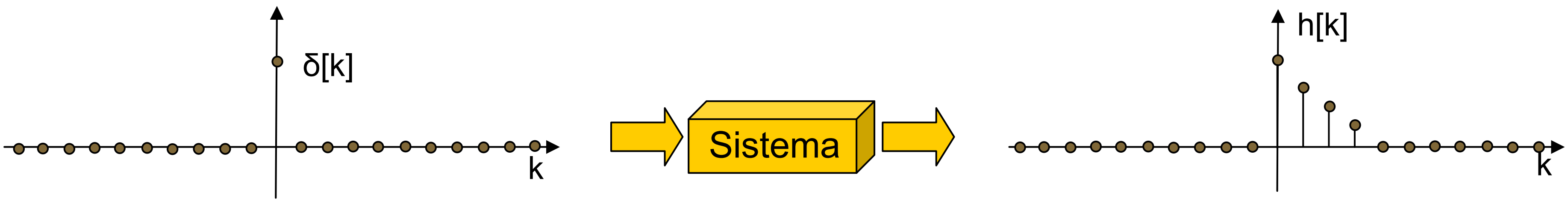
o sinal de saída será dado por:

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot h[k-m]$$

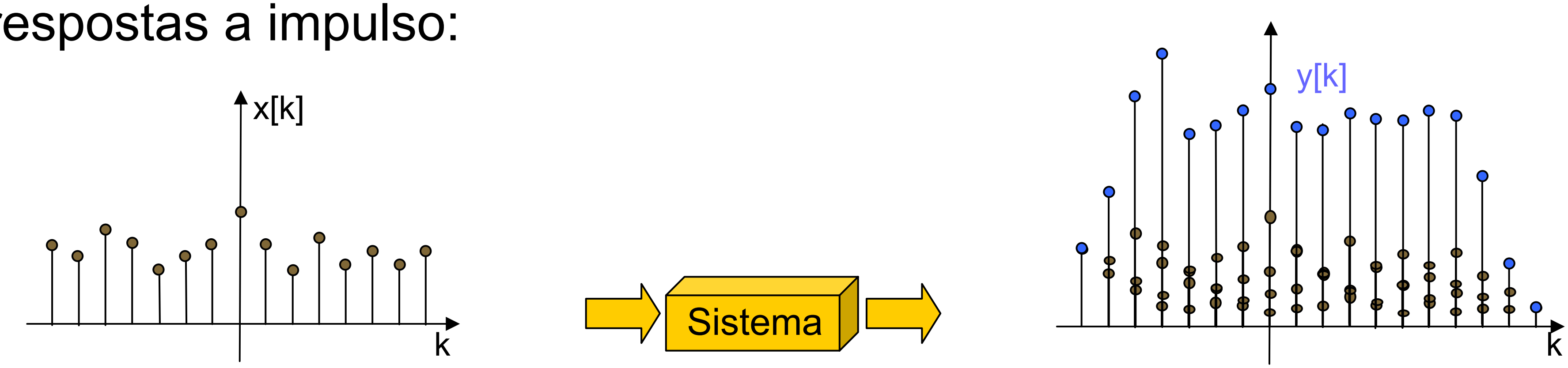
Ou seja, se temos na entrada uma combinação linear de impulsos (soma de impulsos deslocados no tempo, cada um deles com um dado peso), a resposta de um sistema linear e invariante no tempo será necessariamente um sinal que é uma soma de respostas a impulso deslocadas no tempo, cada uma com o peso do impulso que lhe deu origem.

Resposta a estado-nulo

Se a resposta a impulso de um sistema for:



Interpretando um sinal de entrada como sendo uma sequência de impulsos, a resposta a estado-nulo será uma sequência de respostas a impulso:



Resposta a estado-nulo

A resposta a estado-nulo de um sistema discreto é então dada por:

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot h[k-m]$$

Esta operação pode ser representada de forma mais compacta por:

$$y[k] = x[k] * h[k]$$

Esta operação recebe a designação de **convolução discreta**.

Se para determinar a resposta a estado-nulo de um sistema discreto é necessário convolver o sinal de entrada com a resposta a impulso, é fundamental saber como determinar a expressão analítica de **h[k] – resposta a impulso**.

Resposta a impulso de um sistema discreto

A resposta a impulso de um sistema discreto é dada por:

$$h[k] = \frac{b_0}{a_0}\delta[k] + y_{0h}[k] \cdot u[k]$$

À semelhança dos sistemas contínuos, a existência ou não de um impulso na resposta a impulso depende dos coeficientes da equação às diferenças.

Da resposta a entrada-nula $y_{0h}[k]$ surgem coeficientes que ficam por determinar. Para sistemas contínuos estes coeficientes eram determinados por condições iniciais 'especiais'. Para sistemas discretos a forma de determinar esses coeficientes é diferente e será vista nas aulas teorico-práticas.

Resposta total de um sistema discreto

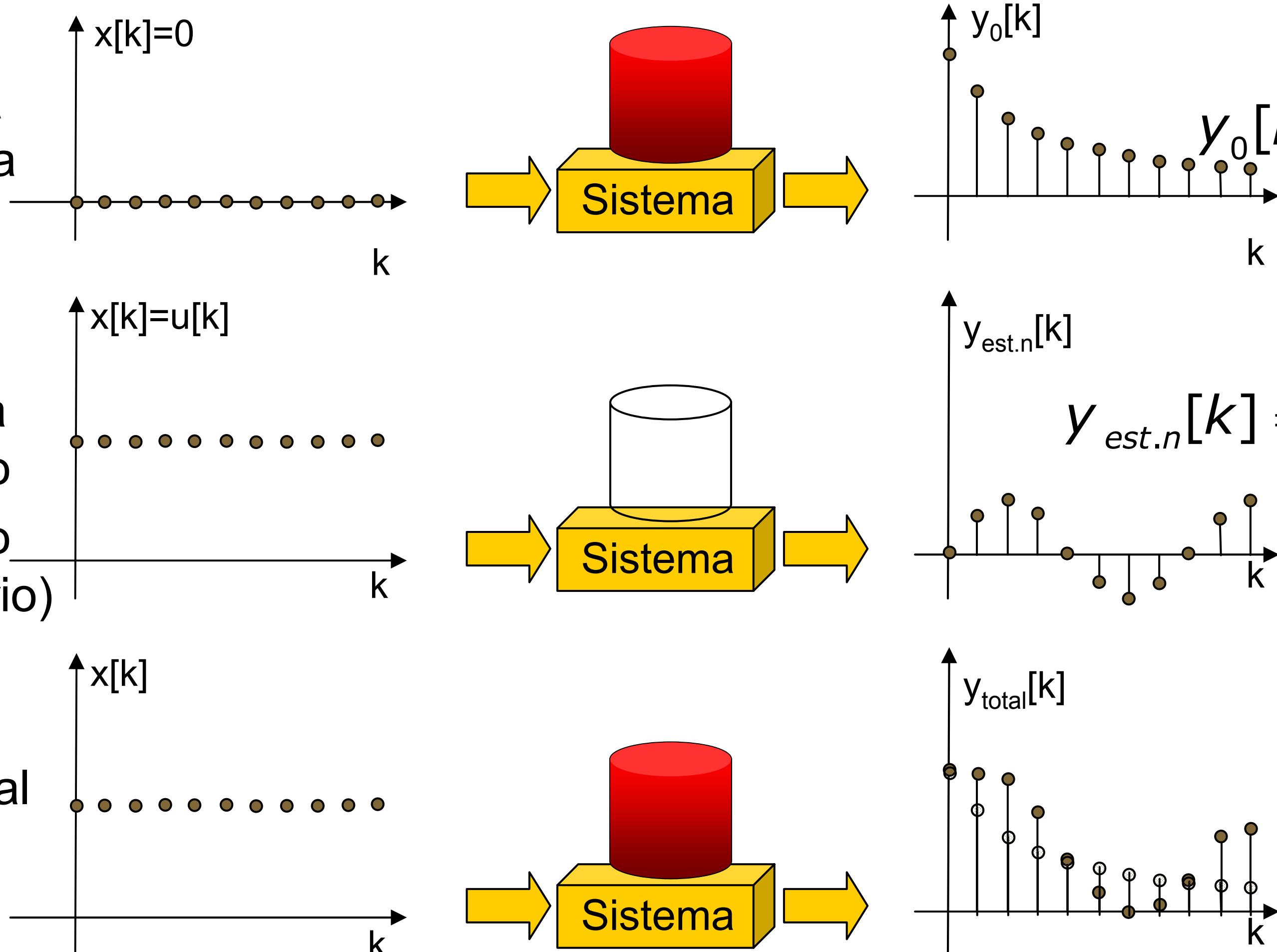
A resposta total de um sistema será a soma das componentes:

- **resposta a entrada-nula** e **resposta a estado-nulo**

Resposta a entrada-nula

Resposta a estado-nulo (p. exemplo degrau unitário)

Resposta total



$$y_0[k] = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i^k$$

$$y_{est.n}[k] = x[k] * h[k]$$

$$y_{total}[k] = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i^k + x[k] * h[k]$$

Estabilidade de um sistema discreto

A resposta a entrada-nula fornece muita informação sobre a estabilidade de sistemas.

Se um sistema, mesmo com uma entrada nula, vê a sua saída tender para infinito apenas porque tem armazenada alguma energia, isto é sintomático de um **sistema instável**.

Por outro lado se um sistema vê a sua resposta a entrada-nula extinguir-se à medida que o tempo passa, ele será um **sistema estável**.

Se um sistema apresenta como resposta a entrada-nula uma saída que não desaparece com o tempo, mas que também não tende para infinito, então esse sistema é **marginalmente estável**.

Estabilidade de um sistema discreto

Sendo a configuração da resposta a entrada-nula a ditar a estabilidade de um sistema, é necessário conhecer bem os possíveis formatos dessa resposta.

Estes formatos dependem do tipo de raízes características do sistema.

Quando a raíz é simples e real, a resposta a entrada-nula será uma combinação de sinais na forma γ^k:

$$y_0[k] = c_1\gamma_1^k + c_2\gamma_2^k + \ldots + c_n\gamma_n^k$$

Se as raízes tiverem multiplicidade superior a 1, os modos que surgem têm a forma $\gamma^k, k\gamma^k, k^2\gamma^k, \ldots, k^{r-1}\gamma^k$, sendo a resposta a entrada-nula uma combinação deles:

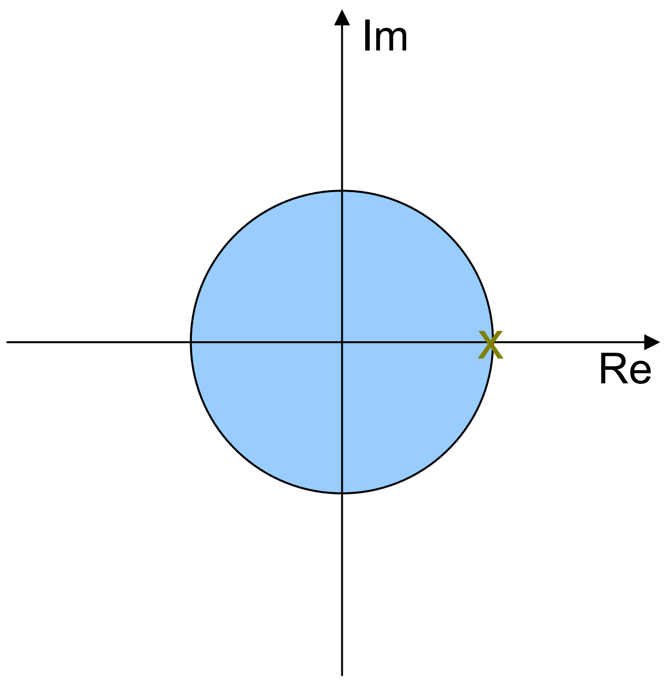
$$y_0[k] = \left(c_1 + c_2k + c_3k^2 + \ldots + c_rk^{r-1}\right)\gamma_1^k$$

Para raízes complexas obteremos uma resposta a entrada-nula na forma:

$$y_0\left[k\right] = c\left|\gamma\right|^k \cos\left(\angle\gamma k + \theta\right)$$

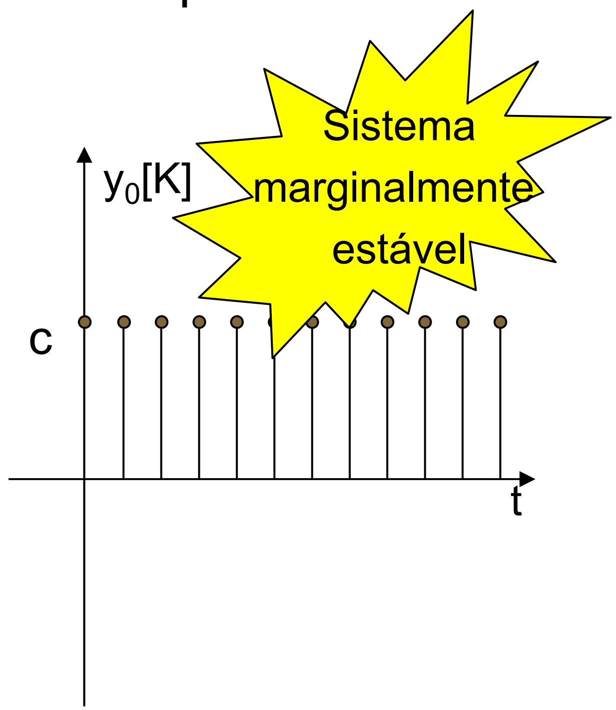
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raíz real de módulo unitário positiva

Resposta a entrada-nula



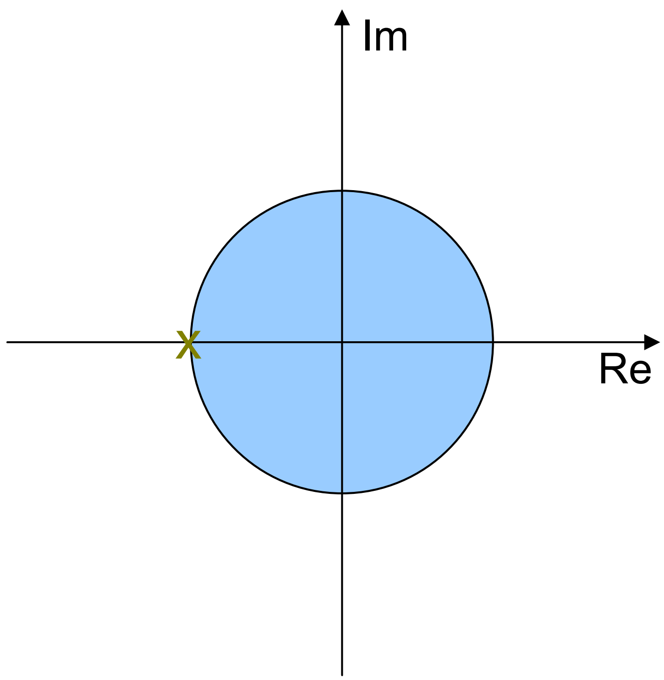
$$y_0[k] = c\gamma^k$$

$$\gamma = 1$$

$$y_0[k] = c$$

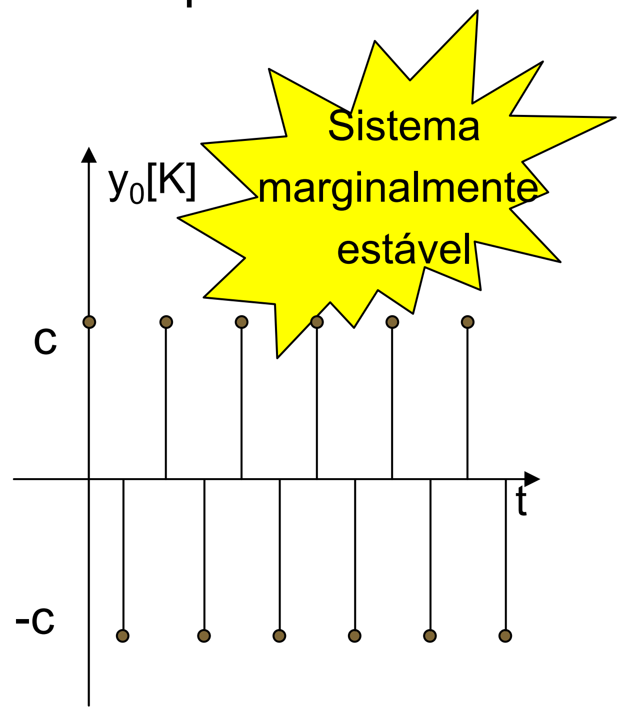
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raíz real de módulo unitário negativa

Resposta a entrada-nula

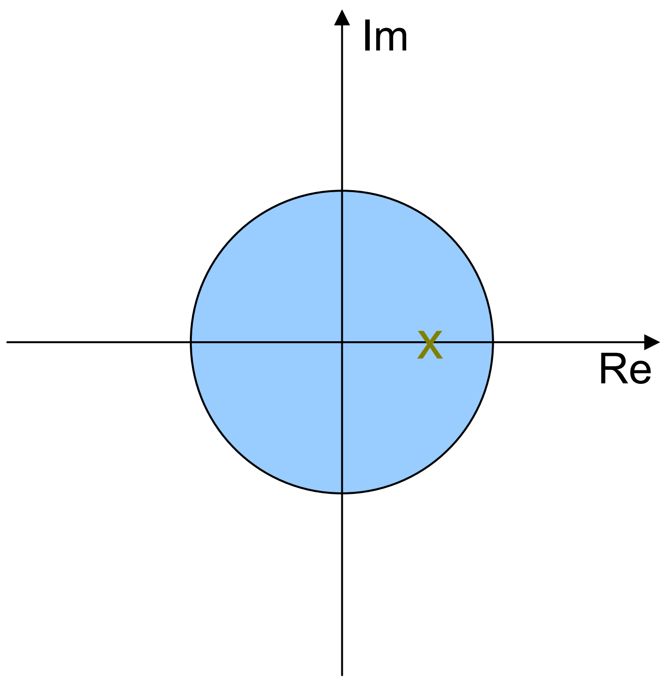


$$\gamma = -1 \qquad y_0[k] = c\gamma^k$$

$$y_0[k] = c\left(-1\right)^k$$

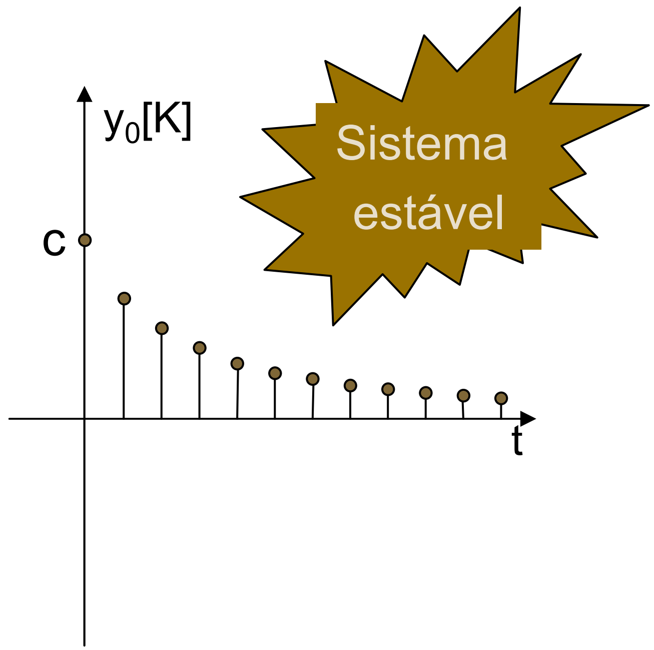
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raíz real positiva
de módulo inferior a 1

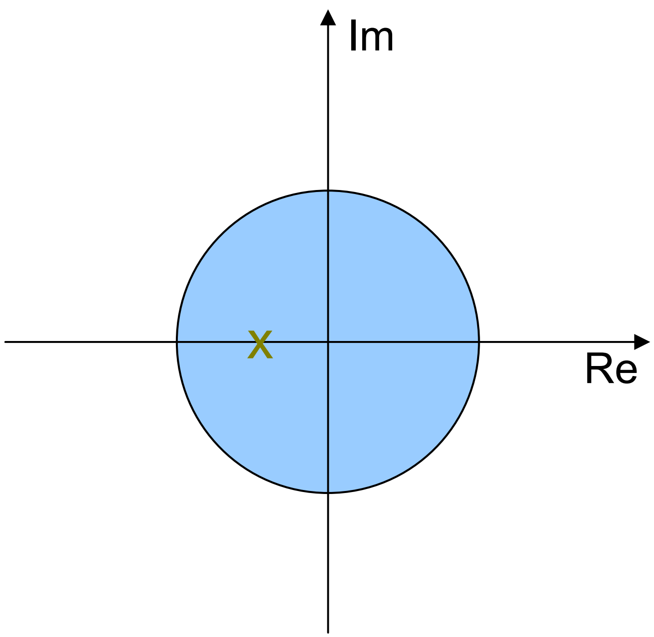
Resposta a entrada-nula



$$y_0[k] = c\gamma^k$$

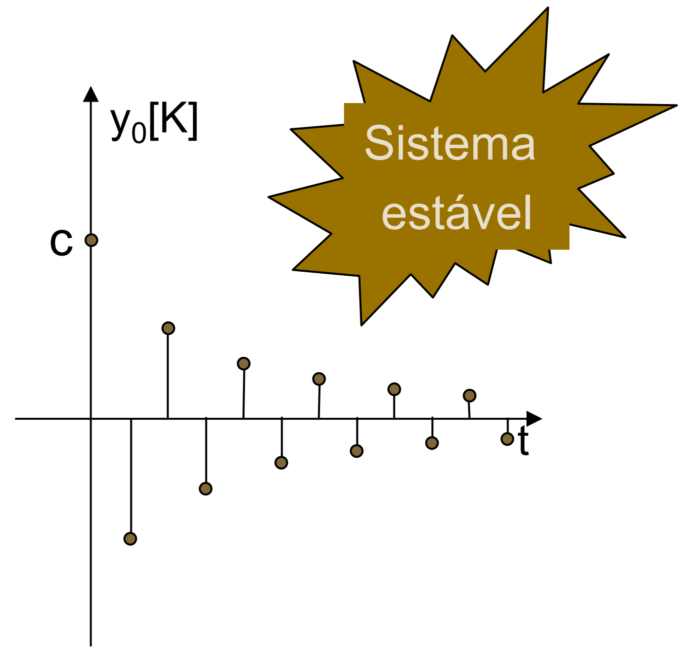
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raíz real negativa
de módulo inferior a 1

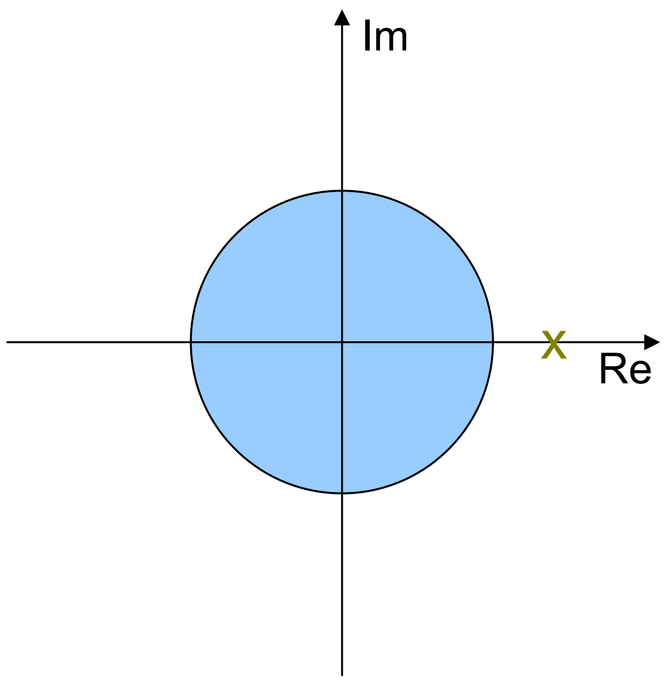
Resposta a entrada-nula



$$y_0[k] = c\gamma^k$$

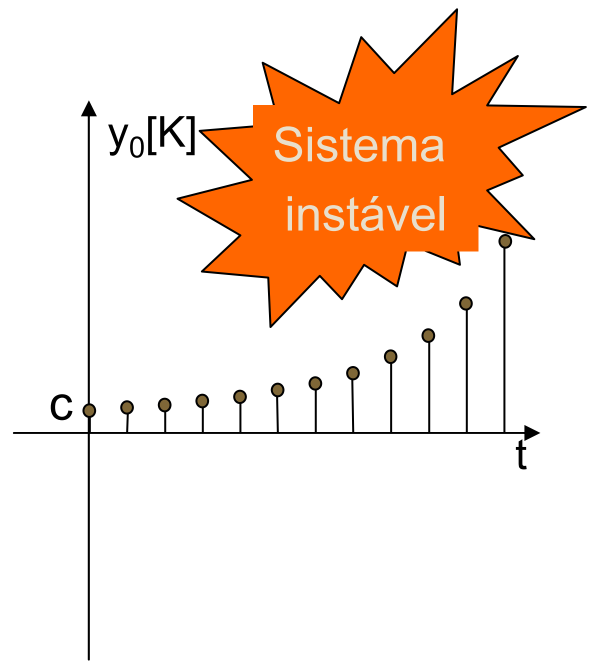
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raíz real positiva
de módulo superior a 1

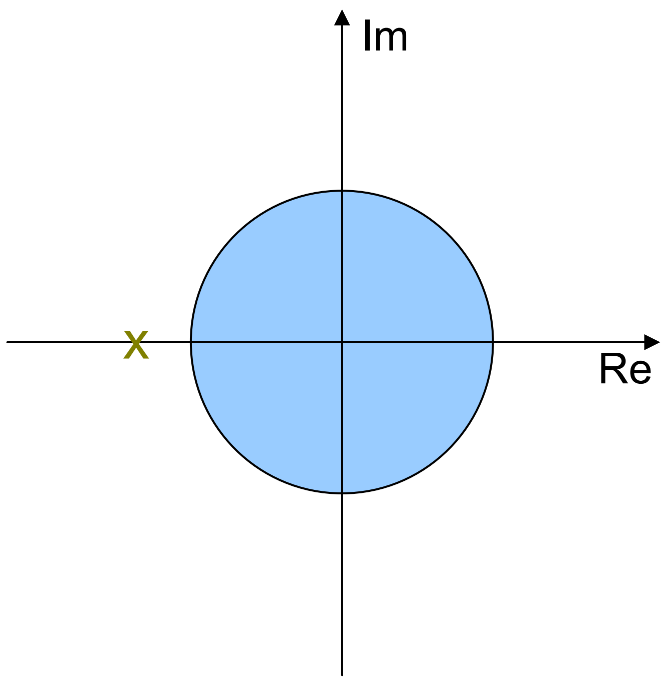
Resposta a entrada-nula



$$y_0[k] = c\gamma^k$$

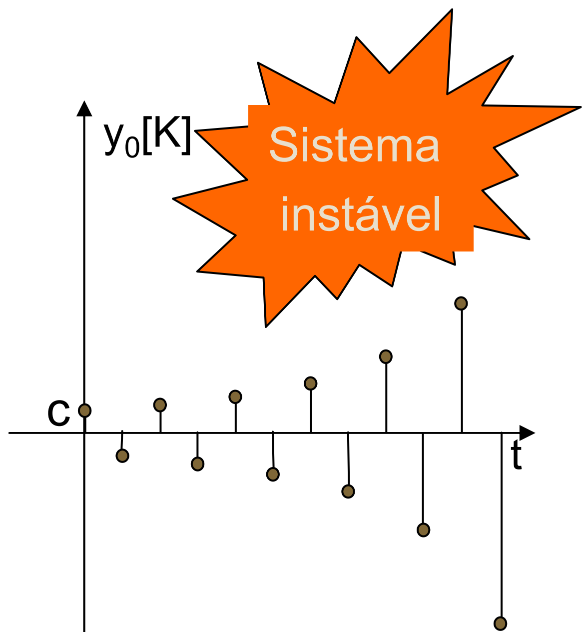
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raíz real negativa
de módulo superior a 1

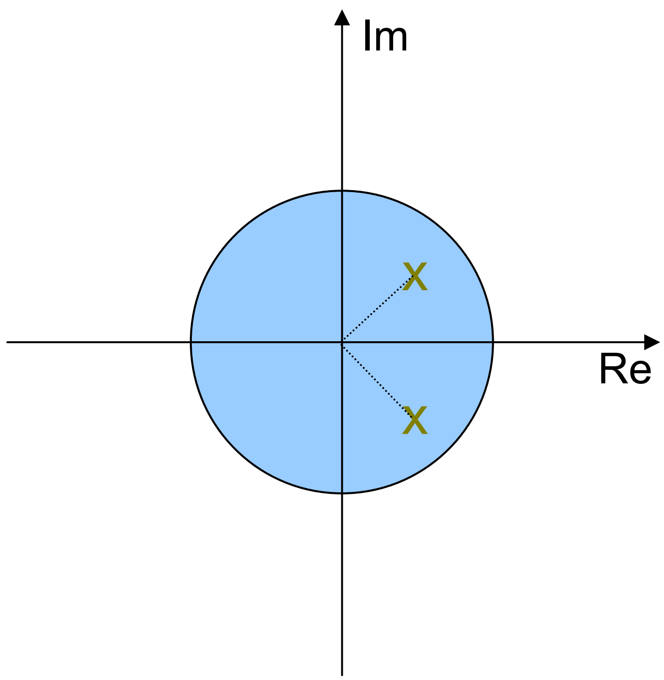
Resposta a entrada-nula



$$y_0[k] = c\gamma^k$$

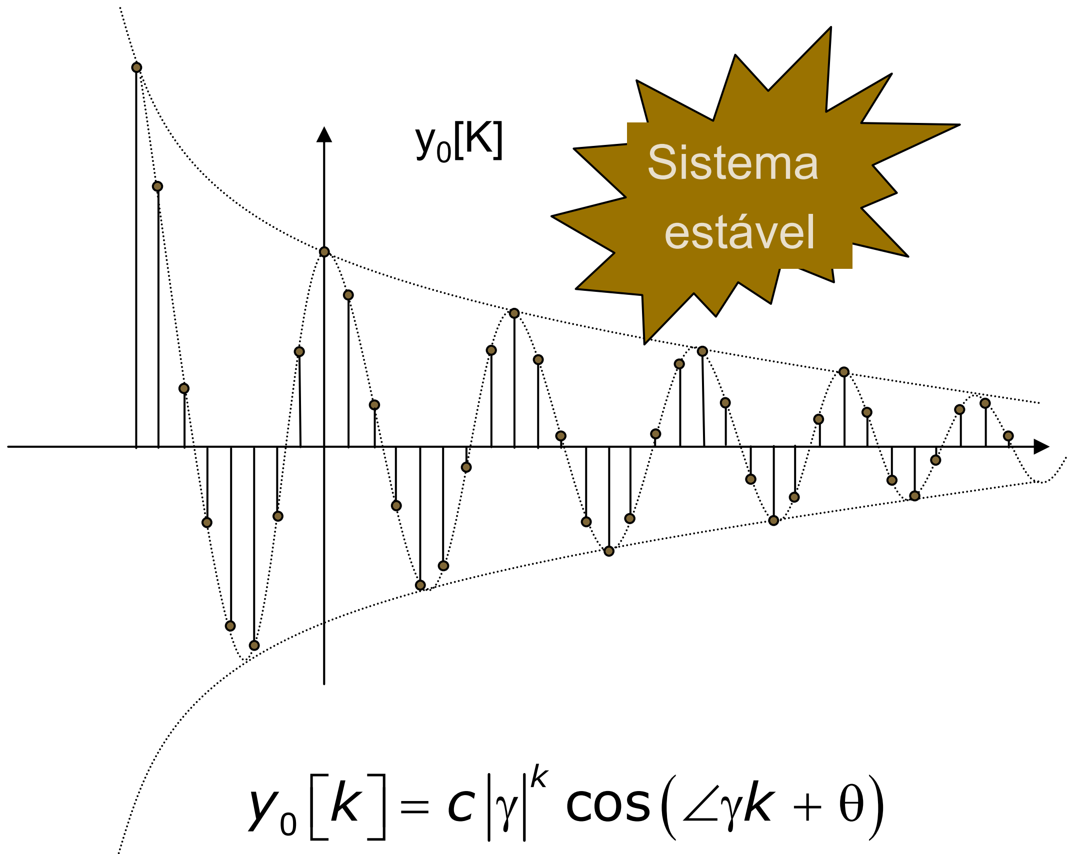
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raízes complexas
de módulo inferior a 1

Resposta a entrada-nula



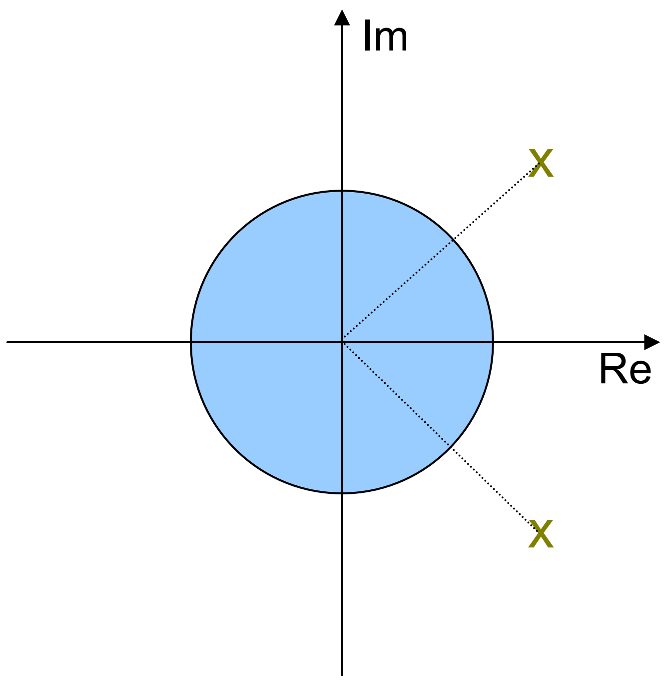
$$y_0[k] = c|\gamma|^k \cos(\angle\gamma k + \theta)$$

$\Downarrow$

Exponencial discreta decrescente

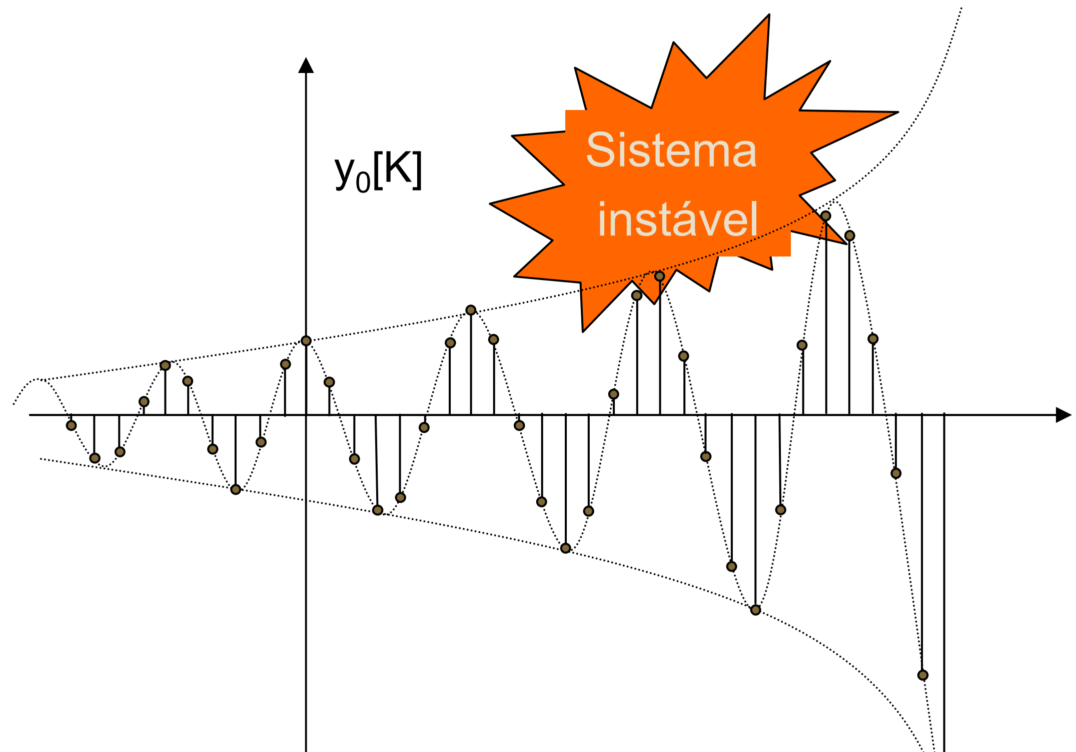
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raízes complexas
de módulo superior a 1

Resposta a entrada-nula



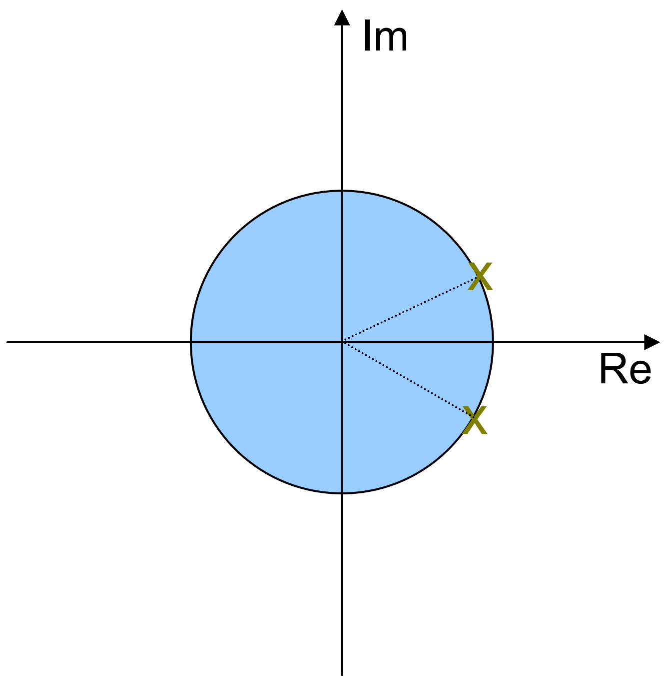
$$y_0[k] = c\,|\gamma|^k \cos\left(\angle\gamma k + \theta\right)$$

$\Downarrow$

Exponencial discreta crescente

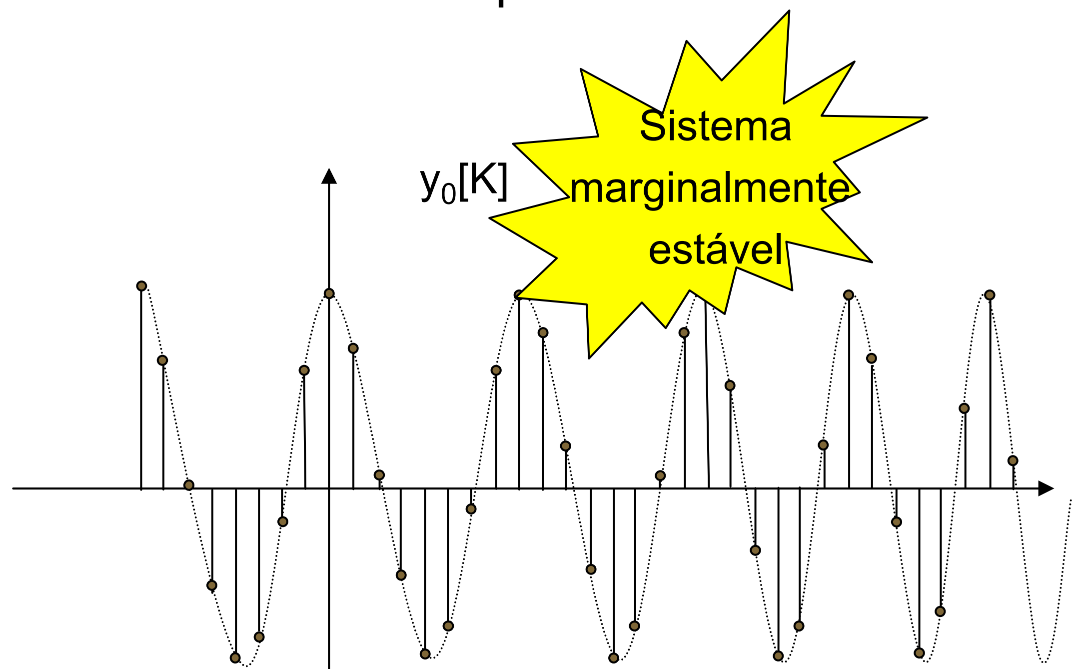
Estabilidade de um sistema discreto

Localização das raízes características



Raíz complexa
de módulo unitário

Resposta a entrada-nula



$$|\gamma| = 1$$

$$y_0[k] = c\,|\gamma|^k \cos(\angle\gamma k + \theta)$$

$$y_0[k] = c\,|1|^k \cos(\angle\gamma k + \theta)$$

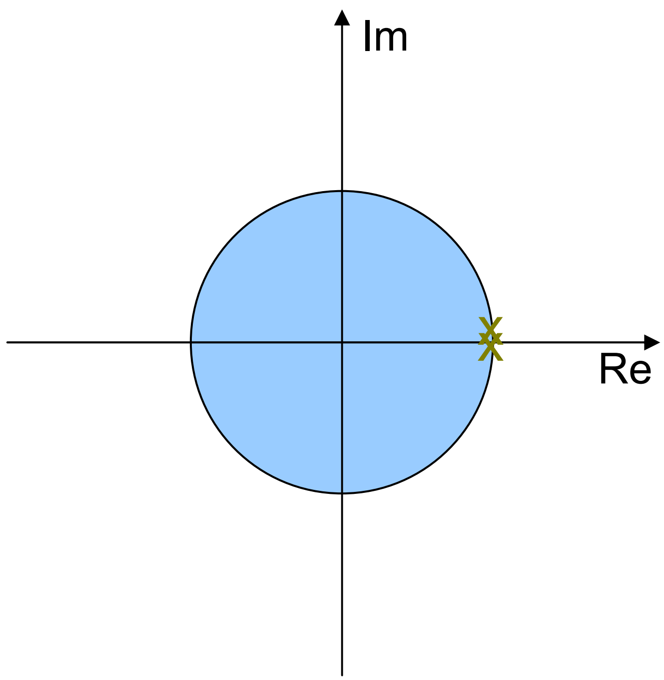
$$y_0[k] = c \cos(\angle\gamma k + \theta)$$

$\Downarrow$

Sinusóide de amplitude constante

Estabilidade de um sistema discreto

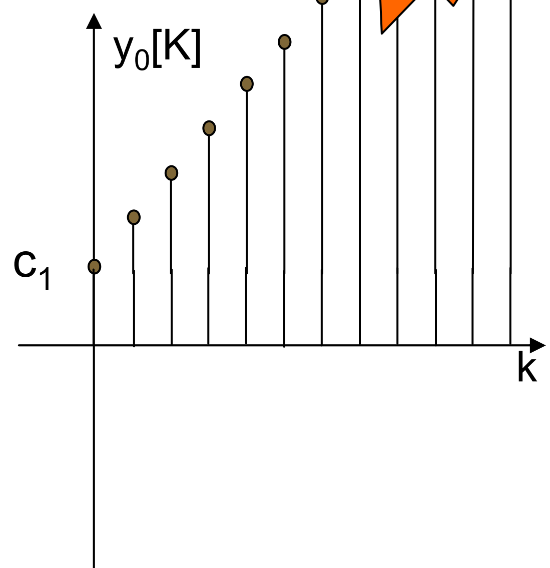
Localização das raízes características



Raíz real dupla positiva
de módulo unitário

Resposta ula

Sistema instável



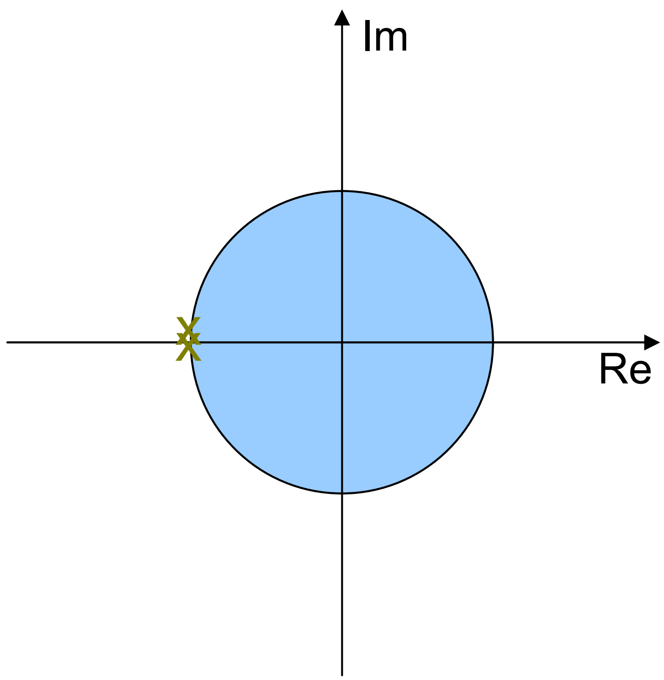
$$y_0[k] = c_1\gamma^k + c_2 k\gamma^k$$

$$\gamma = 1$$

$$y_0[k] = c_1 + c_2 k$$

Estabilidade de um sistema discreto

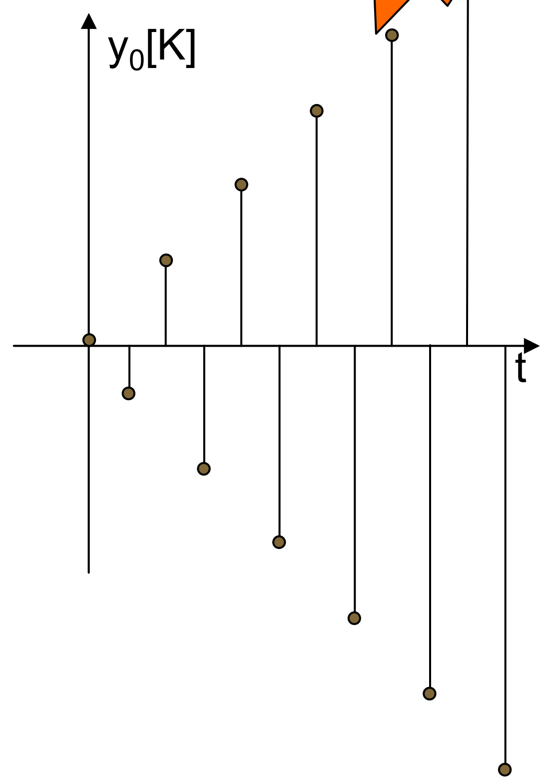
Localização das raízes características



Raíz real dupla negativa
de módulo unitário

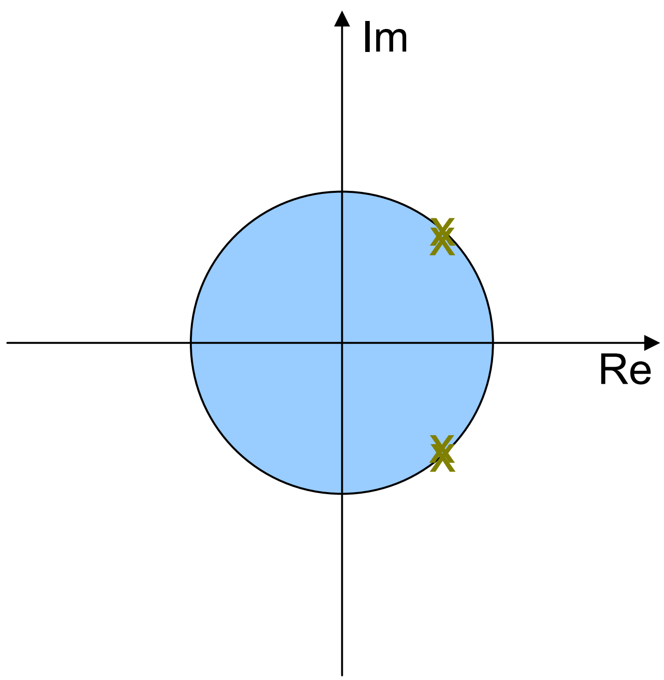
Resposta ula

Sistema instável



Estabilidade de um sistema discreto

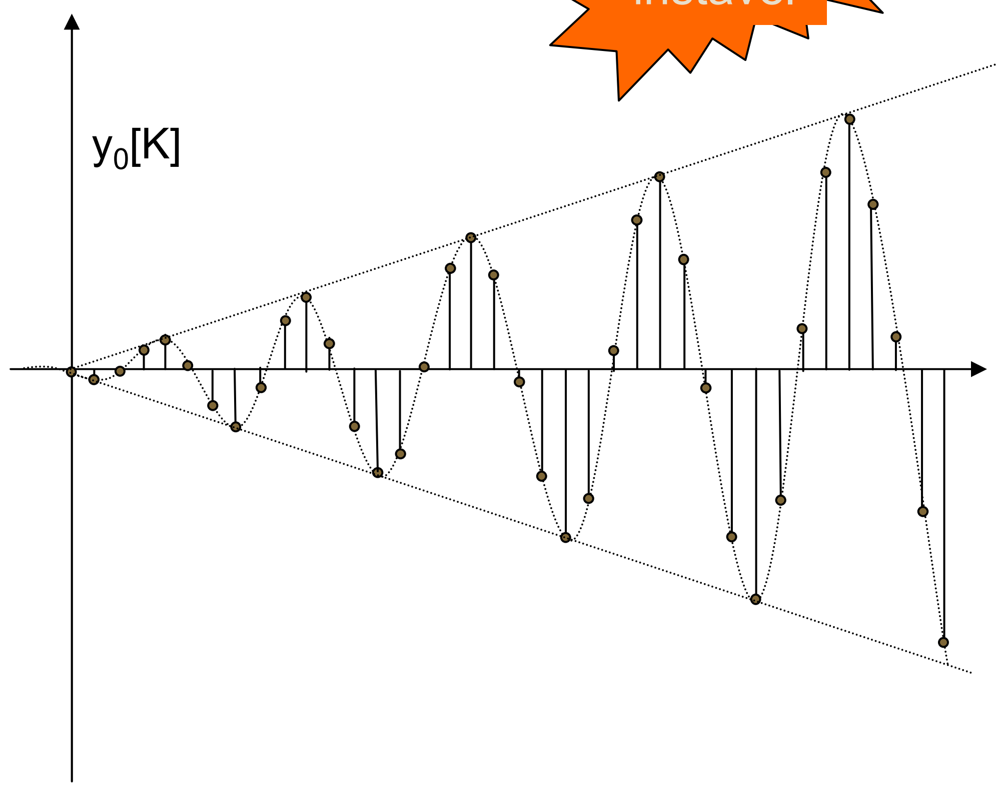
Localização das raízes características



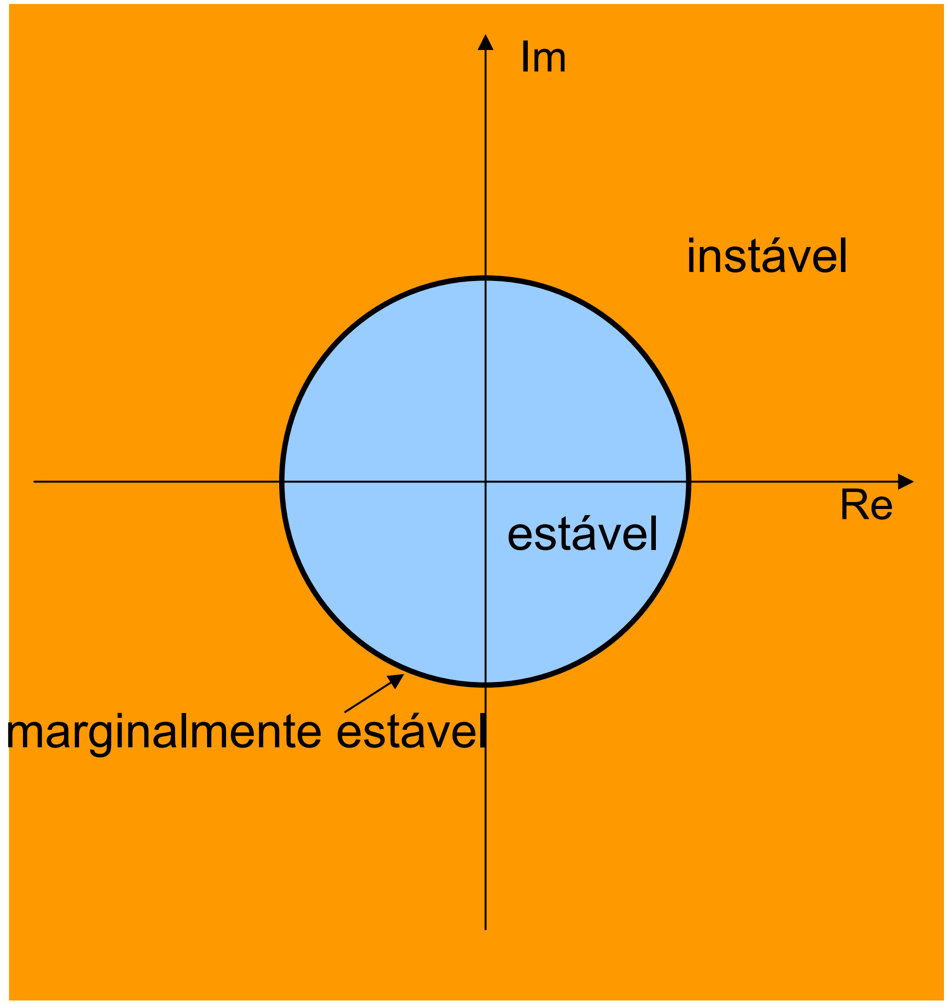
Raíz complexa dupla
de módulo unitário

Respost nula

Sistema
instável



Estabilidade de um sistema discreto – resumo



Quadro resumo de análise no tempo (contínuo e discreto)

- Definição de Sinal
- Definição de Sistema (Circuito)
- Caracterização de sinais:
  - Contínuos/Discretos
  - Periódicos/Aperiódicos
  - Analógicos/Digitais
- Transformações na variável independente:
  - Translacção temporal
  - Escalonamento temporal
  - Inversão temporal

Quadro resumo de análise no tempo (contínuo e discreto)

- Sistemas
  - Contínuos/Discretos
  - Analógicos/Digitais
  - Lineares/Não lineares
  - Variantes/Invariantes no tempo
  - Com/Sem memória
  - Causais e não causais
  - Estáveis/Instáveis
  - Inversos

Quadro resumo de análise no tempo (contínuo e discreto)

Contínuo

Tipo de equação de descrição do sistema:

Equação diferencial:

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$
$$= b_M\frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1}\frac{d^{M-1}x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Operador utilizado - D:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \dots + a_1 D + a_0\right)y(t)$$
$$= (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \dots + b_1 D + b_0)x(t)$$

Simplificação utilizando os polinómios:

$$Q(D) = D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \dots + a_1 D + a_0$$
$$P(D) = b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \dots + b_1 D + b_0$$

Resultando em:

$$Q(D).y(t) = P(D).x(t)$$

Discreto

Tipo de equação de descrição do sistema:

Equação às diferenças:

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] =$$
$$b_n x[k+n] + b_{n-1}x[k+n-1] + \dots + b_1 x[k+1] + b_0 x[k]$$

Operador utilizado - E:

$$\left(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \dots + a_1 E + a_0\right)y[k]$$
$$= \left(b_n E^n + b_{n-1}E^{n-1} + \dots + b_1 E + b_0\right)x[k]$$

Simplificação utilizando os polinómios:

$$Q[E] = E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \dots + a_1 E + a_0$$
$$P[E] = b_n E^n + b_{n-1}E^{n-1} + \dots + b_1 E + b_0$$

Resultando em:

$$Q[E]y[k] = P[E]x[k]$$

Quadro resumo de análise no tempo (contínuo e discreto)

Contínuo

Cálculo das raízes características:

$$Q(\lambda) = 0$$

Resposta a entrada-nula:

Raízes simples:

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

Raízes múltiplas (multiplicidade *r*):

$$y_0(t) = \left(c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1}\right) e^{\lambda_1 t}$$

Raízes complexas:

$$y_0(t) = c e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

A parte real da raíz característica, α, controla a exponencial, e β, a parte imaginária, controla a frequência de oscilação.

Discreto

Cálculo das raízes características:

$$Q[\gamma] = 0$$

Resposta a entrada-nula:

Raízes simples:

$$y_0[k] = c_1 \gamma_1^k + c_2 \gamma_2^k + \dots + c_n \gamma_n^k$$

Raízes múltiplas (multiplicidade *r*):

$$y_0[k] = \left(c_1 + c_2 k + c_3 k^2 + \dots + c_r k^{r-1}\right) \gamma_1^k$$

Raízes complexas:

$$y_0\left[k\right] = c\left|\gamma\right|^k \cos\left(\angle\gamma k + \theta\right)$$

O módulo da raíz característica, |γ|, controla a exponencial, e a sua fase, ∟γ, controla a frequência de oscilação.

Quadro resumo de análise no tempo (contínuo e discreto)

Contínuo

Cálculo da resposta a impulso:

$$h(t) = b_n\delta(t) + [P(D)y_0(t)]u(t)$$

Resposta a estado-nulo:

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$

Resposta total:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}}_{\text{Resposta a entrada-nula}} + \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{Resposta a estado-nulo}}$$

Discreto

Cálculo resposta a impulso:

$$h[k] = \frac{b_0}{a_0}\delta[k] + y_0[k]\cdot u[k]$$

Resposta a estado-nulo:

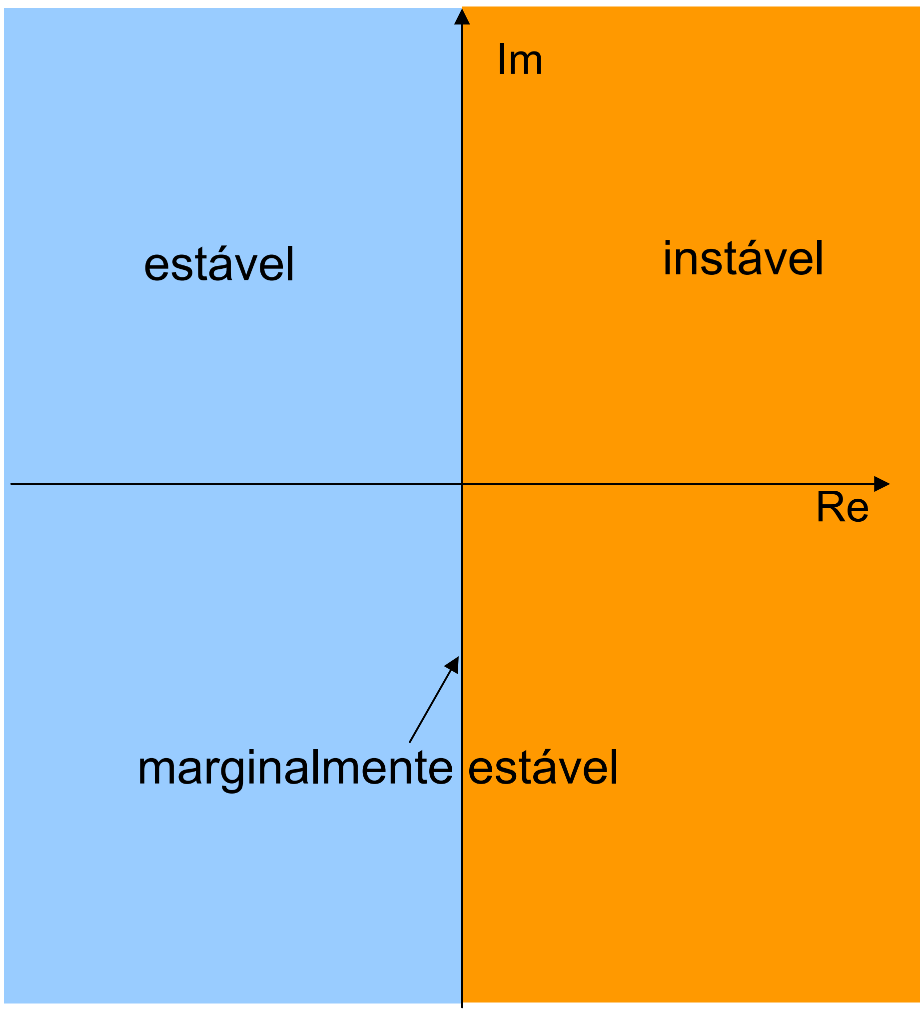
$$y[k] = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\cdot h[k-m]}_{\text{Somatório de convolução}}$$

Resposta total:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i^k}_{\text{Resposta a entrada-nula}} + \underbrace{x[k] * h[k]}_{\text{Resposta a estado-nulo}}$$

Quadro resumo de análise no tempo (contínuo e discreto)

Contínuo



Discreto