Teoria dos Circuitos e do Sinal

Dep. Eng. Electrotécnica

Teoria dos Circuitos e do Sinal

- Docente
  - Luís Filipe Carvalho Simões

- Gabinete
  - 15

- E-mail
  - lfcsimoes@estv.ipv.pt

- Página pessoal
  - www.estv.ipv.pt/paginaspessoais/lfcsimoes

Teoria dos Circuitos e do Sinal - Aulas

- Aulas teóricas
  - 2 horas semanais (1+1)

- Aulas Teórico-Práticas
  - 3 horas semanais (2+1)

Teoria dos Circuitos e do Sinal - Horário

	2ª		3ª		4ª		5ª		6ª	
9	***Teor Circ Sinal T***	***8***								
9:30										
10:00	***Teor Circ Sinal TP2***	***LMic***								
10:30										
11:00					***Teor Circ Sinal TP1***	***LEP***				
11:30										
12:00										
12:30										
13:00	**A**		**L**		**M**		**O**		**Ç**	**O**
14:00										
14:30										
15:00							***Teor Circ Sinal T***	***11***		
15:30										
16:00							***Teor Circ Sinal TP1 & TP2***	***11***		
16:30										

Teoria dos Circuitos e do Sinal - Avaliação

- **Época normal**
  - Uma prova escrita de frequência.
  - Uma prova escrita de exame.
  - Para ter aprovação na disciplina, o aluno terá de obter uma classificação final igual ou superior a 9,5.

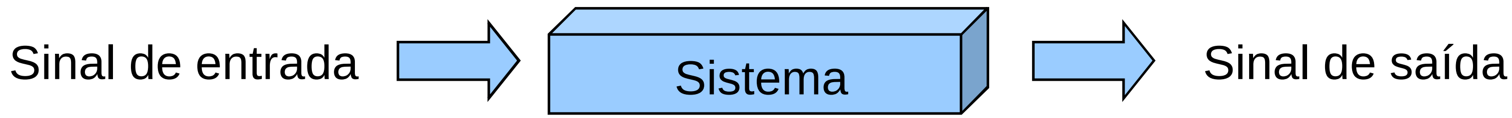
- **Época de Recurso**
  - Uma prova escrita de exame.
  - Poderão participar na época de recurso os alunos que não obtiverem aprovação na época normal ou os que, tendo obtido aprovação na época normal, pretendam obter melhoria de classificação.

Calendário Escolar – Ano lectivo 2006/07

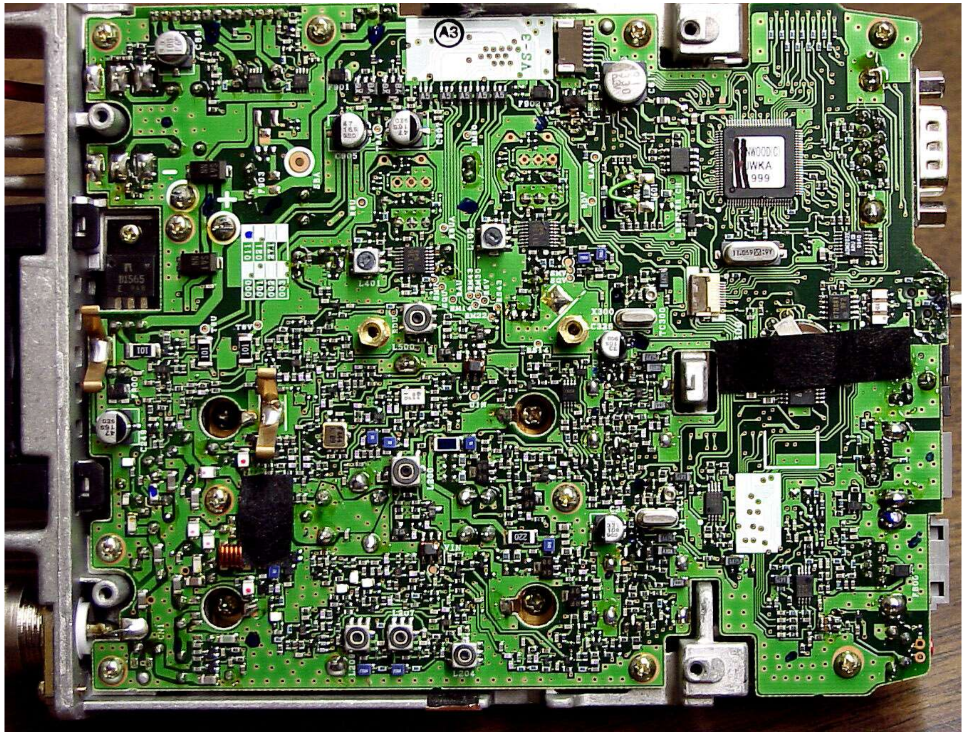
1º Semestre		
	Início	Fim
Semestre	18/Set/2006	15/Dez/2006
Férias(Natal)	18/Dez/2006	03/Jan/2007
Época Normal (Frequências e exames)	04/Jan/2007	31/Jan/2007
Época de Recurso	07/Fev/2007	17/Fev/2007

Definição de Circuito

- Circuito será interpretado nesta cadeira como Sistema. Assim Circuito será toda a entidade que processa sinais de entrada e gera sinais de saída ou algum comportamento desejado.

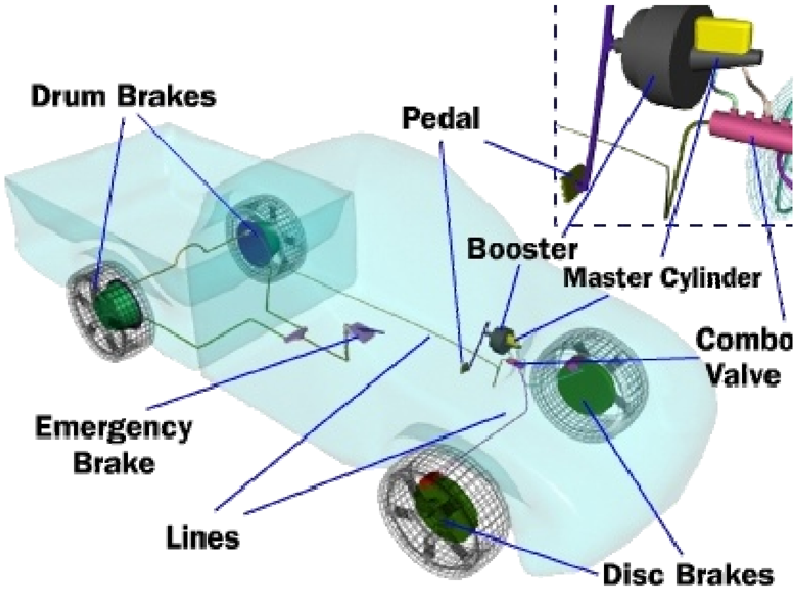


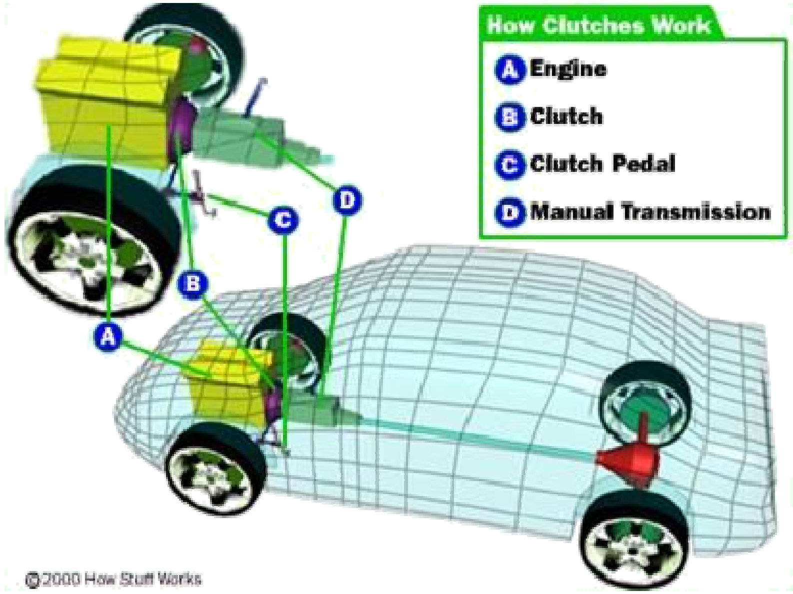
Exemplos de sistemas



- Circuito

Exemplos de Sistemas

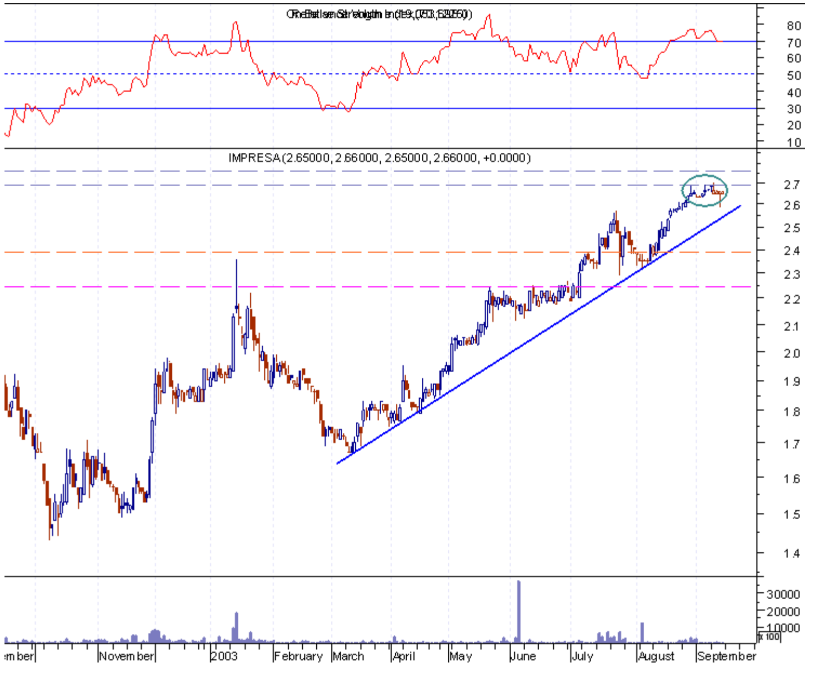




- Sistemas de travagem e embraiagem automóvel

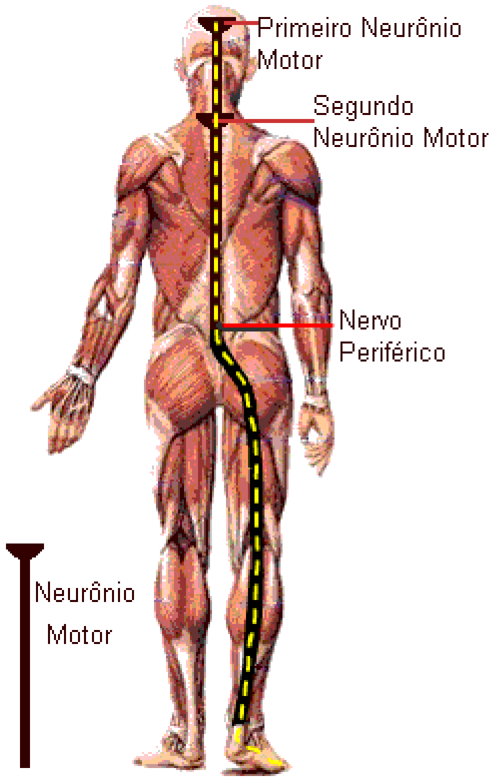
Exemplos de Sistemas

- Colónia de bactérias



- Bolsa

Exemplos de Sistemas

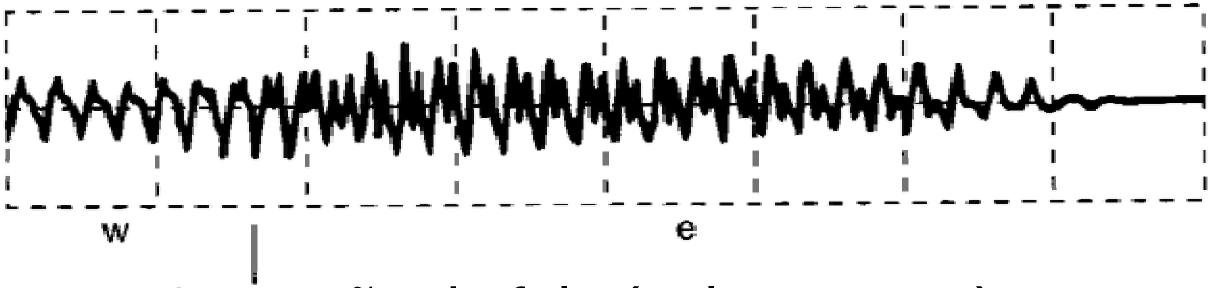


- Corpo humano

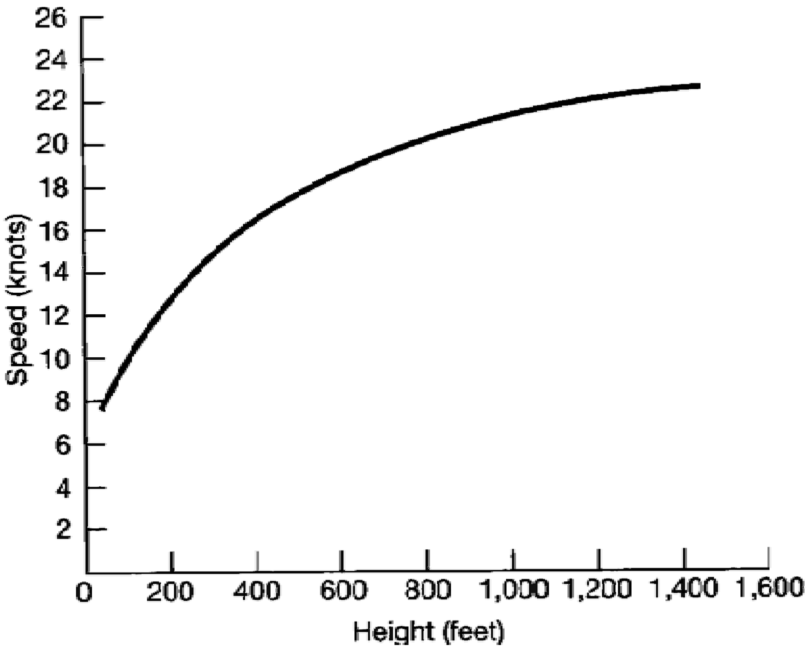
Definição de Sinal

- Um Sinal é um conjunto de informação ou dados.
- Os sinais contêm informação sobre o comportamento de algum fenómeno
- Os sinais são representados matematicamente como função de uma ou mais variáveis independentes (geralmente o tempo).

Exemplos de sinais

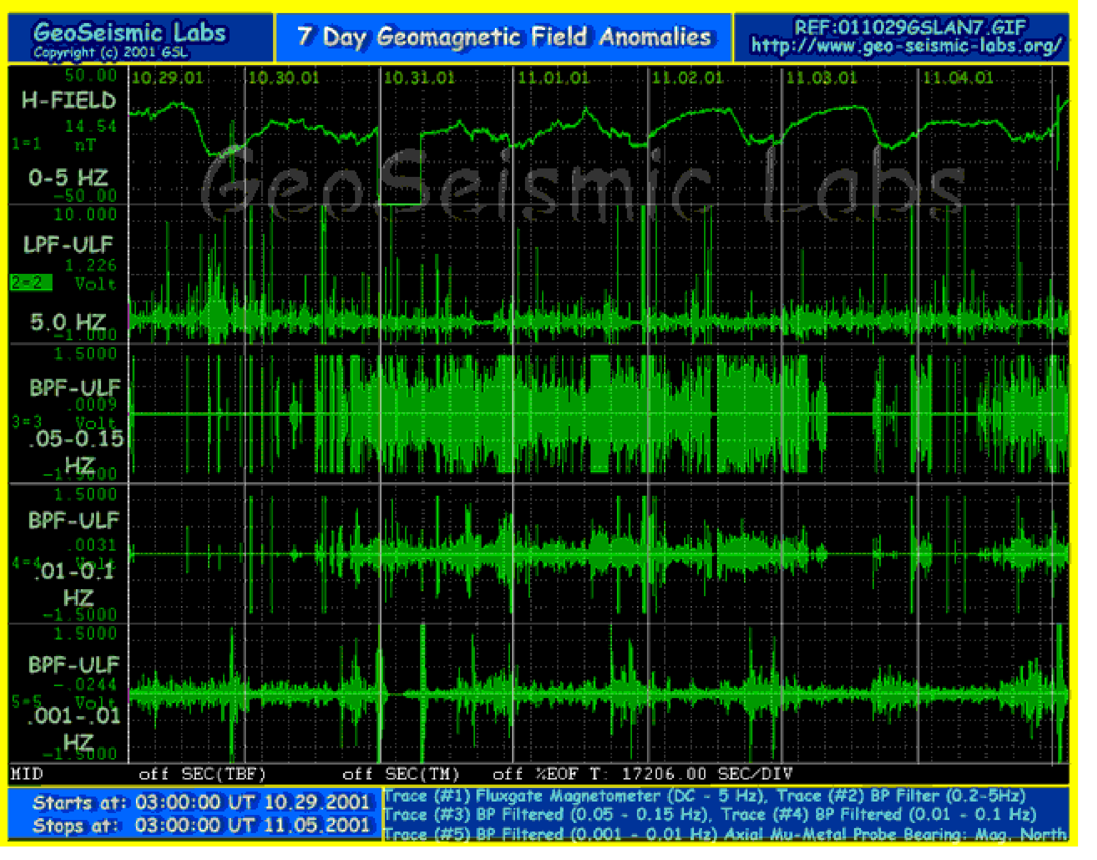


- Gravação de fala (palavra “We”).



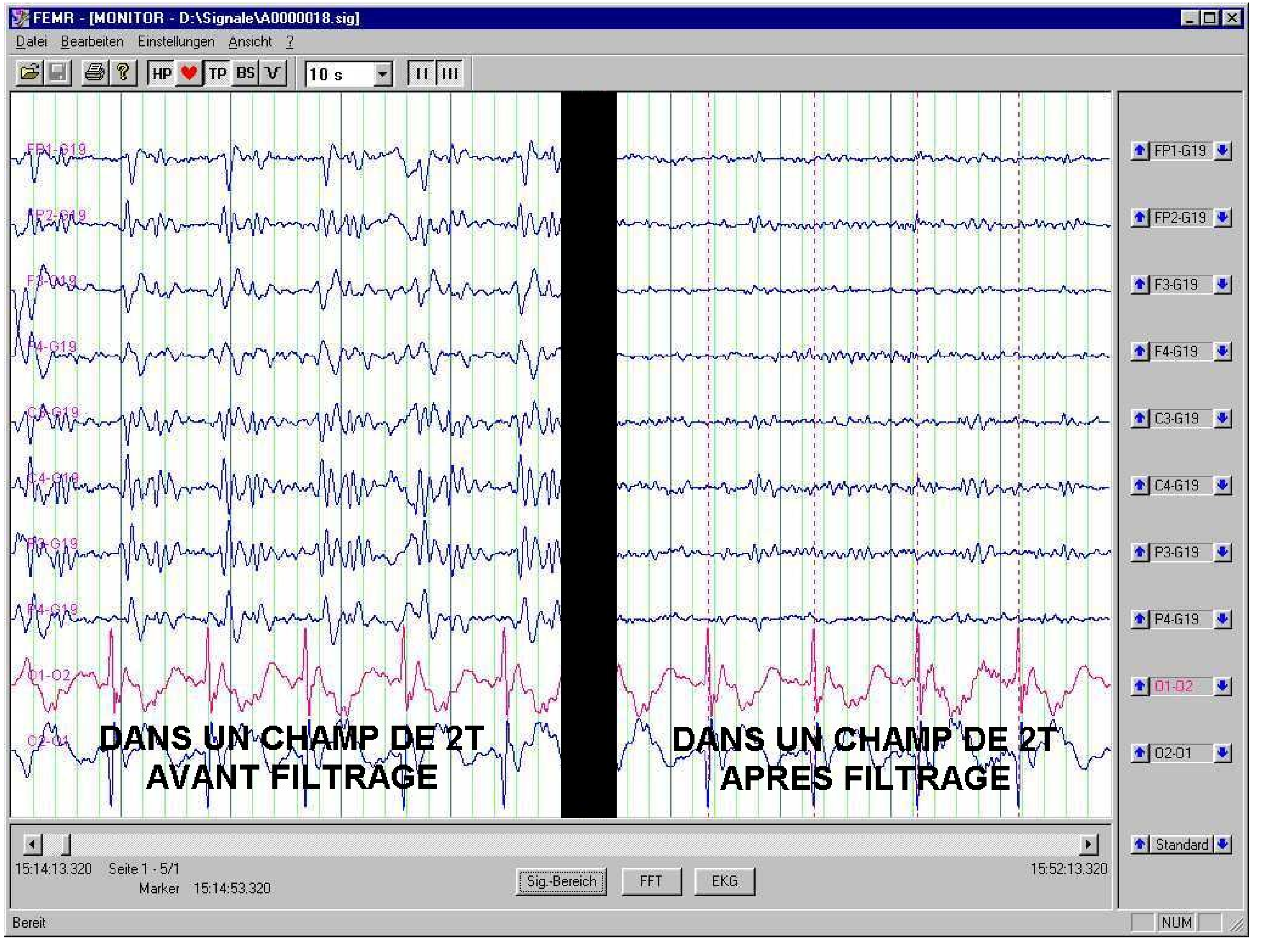
§ Perfil vertical do vento

Exemplos de sinais



§Anomalias no campo geomagnético

Exemplos de sinais



Aplicações da
Teoria do Circuito e do Sinal

- Caracterizar com precisão certos sistemas para perceber como reagirá o sistema a diferentes sinais de entrada.

- Noutros problemas de análise de Teoria do Circuito e do Sinal, em vez da análise de um sistema importa antes o processamento de um sinal.

- Em algumas aplicações é ainda necessário desenhar sistemas para retirar informação específica de sinais.

Sinais contínuos e discretos no tempo

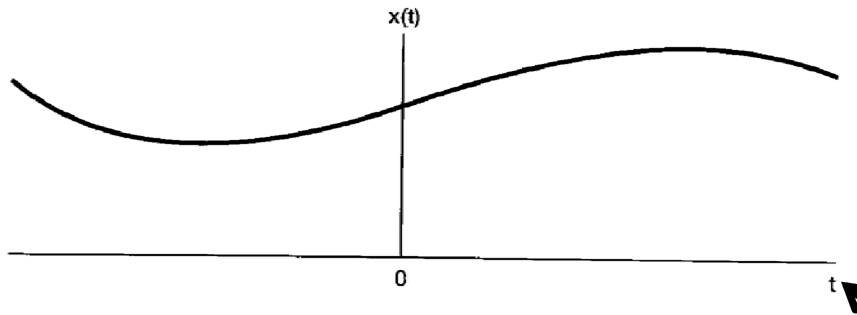
- Uma forma de classificar sinais é fazê-lo de acordo com a natureza da variável independente.

- Um sinal que é especificado para qualquer valor de t (variável independente tempo) é chamado de sinal contínuo.

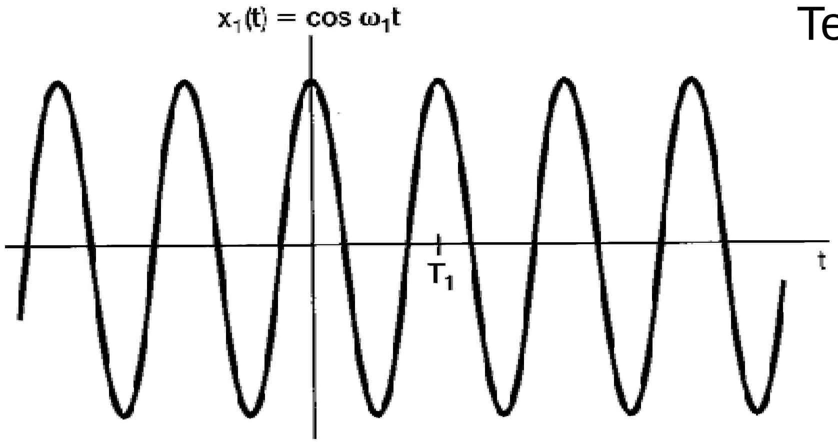
- Um sinal que é especificado para valores discretos de t é chamado de sinal discreto.

- O símbolo *t* denotará a variável independente tempo para **sinais contínuos**: *x(t)*. Para **sinais discretos** o símbolo *k* desempenhará função semelhante: *x[k].*

Exemplos de sinais contínuos no tempo



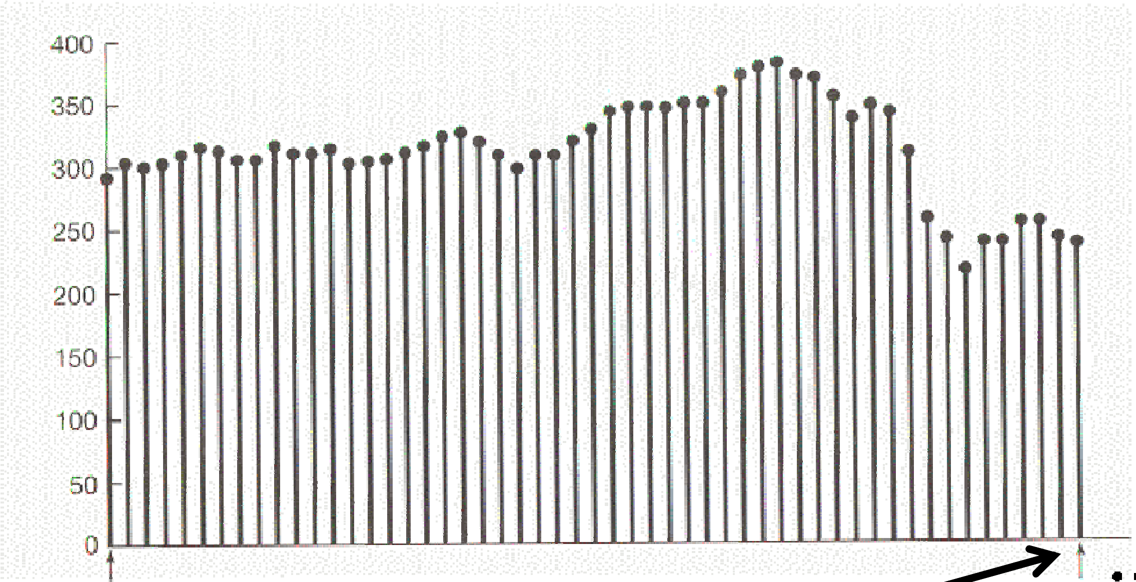
- Sinais contínuos

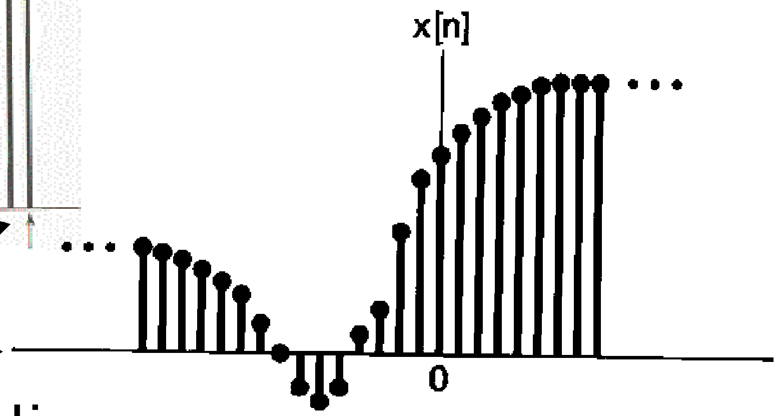


Tempo contínuo *t*

Exemplos de sinais discretos no tempo

- Sinais discretos



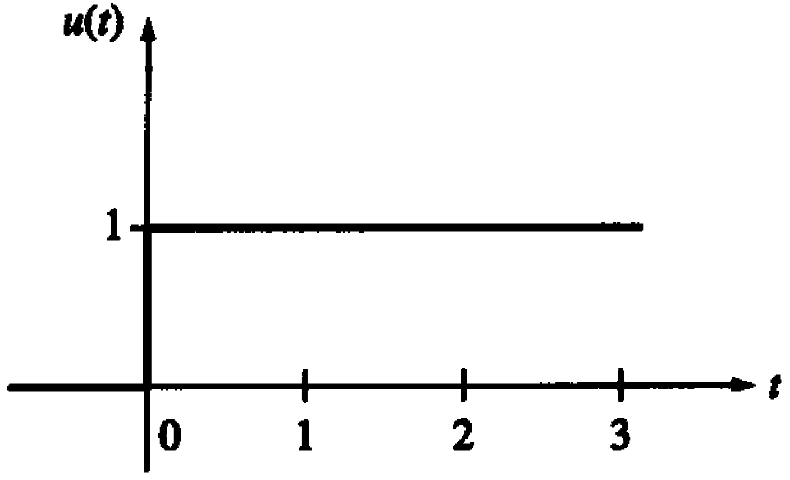


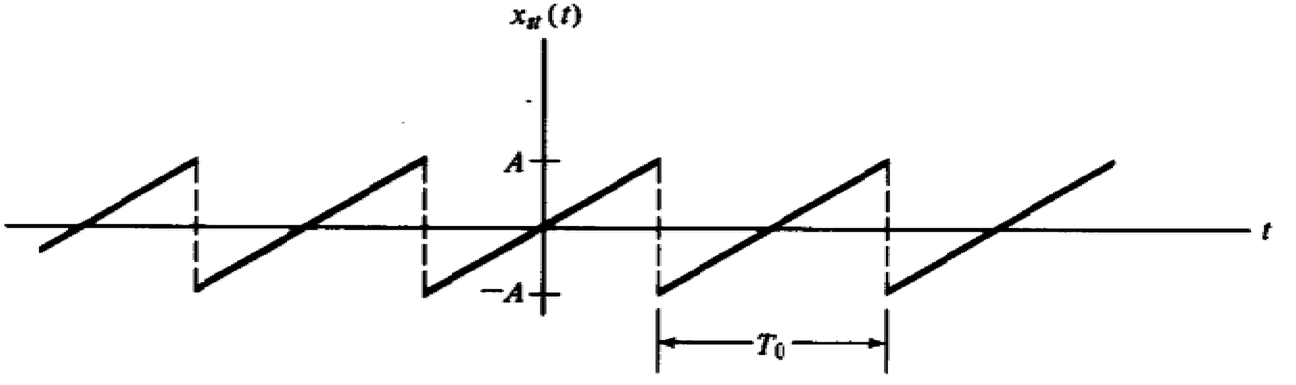
Tempo discreto *k*

§ Exemplo de sinal discreto: índice Dow Jones semanal no ano de 1929.

Contínuos ou discretos no tempo?

- Estes sinais serão contínuos ou discretos no tempo?





Sinais periódicos e aperiódicos

- Um sinal contínuo $x(t)$ será **periódico** se existir um valor T que satisfaça

$$x(t)= x(t+n.T)$$

- qualquer que seja o t, sendo n um inteiro.

- Nesse caso $x(t)$ será um sinal **periódico** de período T.

- O período fundamental T_0 é o menor valor positivo de T que verifica a equação anterior.

- Um sinal que não verifique a equação anterior é dito **aperiódico**.

Sinais periódicos em tempo discreto

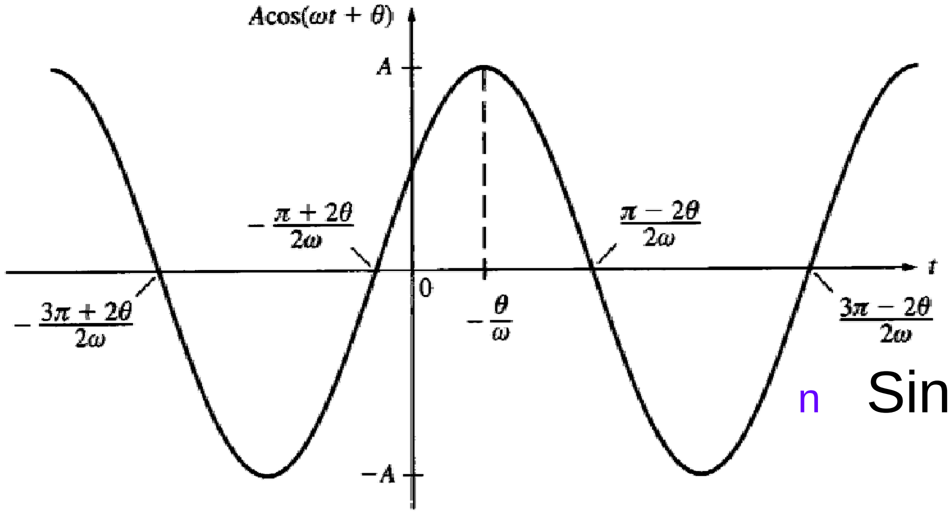
- Um sinal discreto *x[k]* será periódico com período *N*, onde *N* é um inteiro positivo, se se mantiver inalterado após um deslocamento no tempo de N, ou seja:

$$x[k]= x[k+n.N]$$

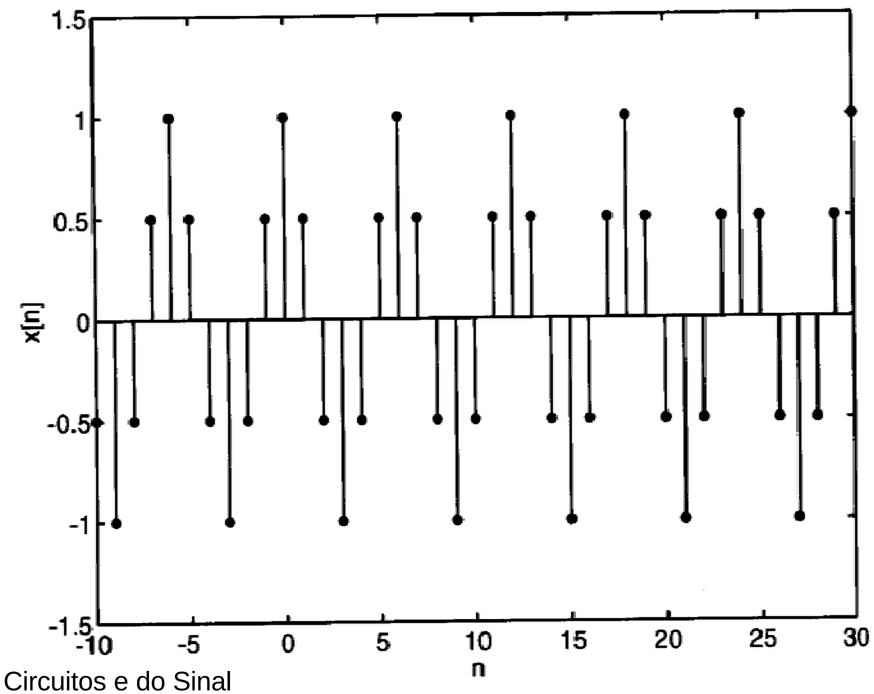
qualquer que seja o k, sendo *n* um inteiro.

- O período fundamental N_0 é o menor valor positivo que verifica a equação anterior.

Exemplos de sinais periódicos

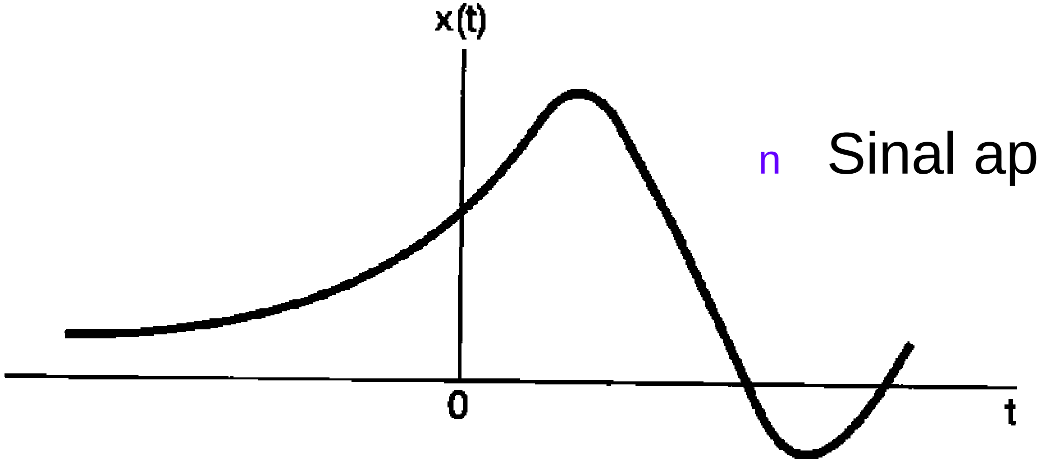


- Sinal periódico contínuo no tempo

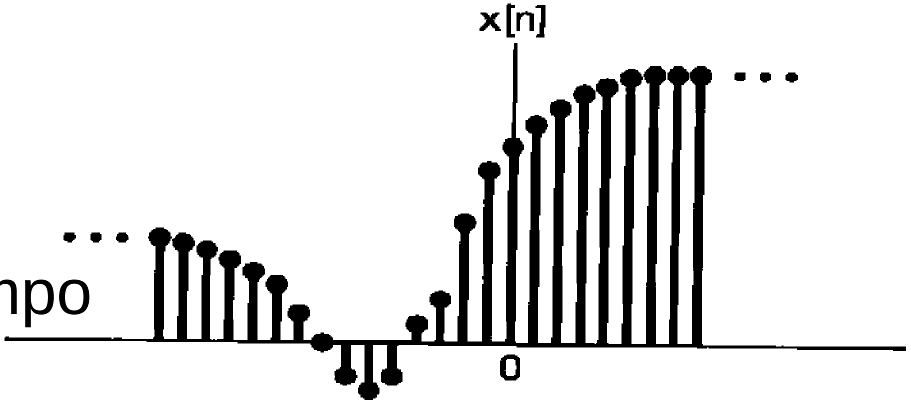


- Sinal periódico discreto no tempo

Exemplos de sinais aperiódicos



- Sinal aperiódico contínuo no tempo



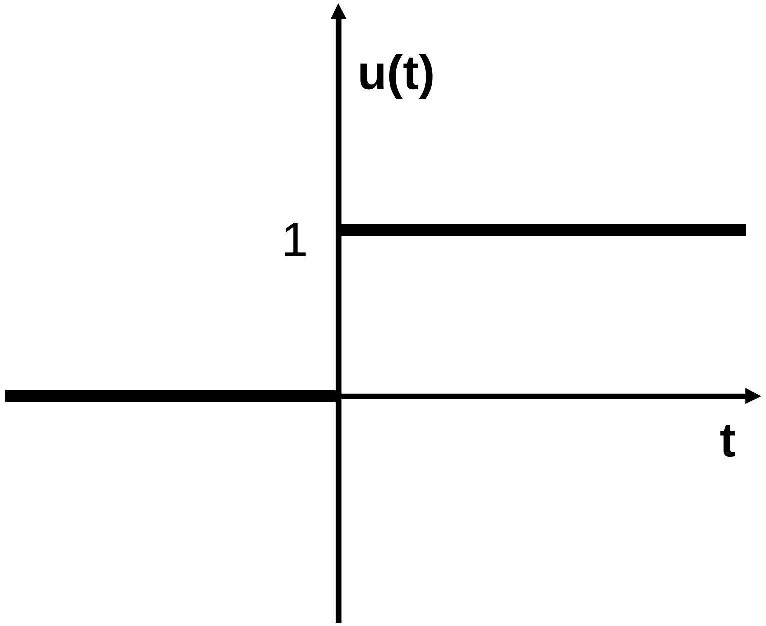
- Sinal aperiódico discreto no tempo

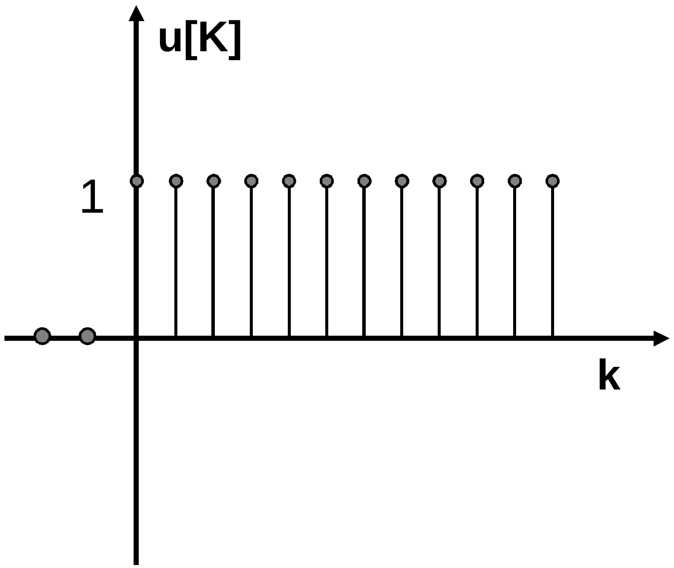
Sinais elementares: Degrau unitário

- Degrau unitário

  Este sinal é definido por:

$$u(t)=\begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \qquad u[k]=\begin{cases} 1, & k>=0 \\ 0, & k<0 \end{cases}$$





Sinais elementares: Impulso unitário

- Este sinal é representado por δ(t), sendo geralmente chamado de função delta de Dirac, ou simplesmente função delta.

Características:

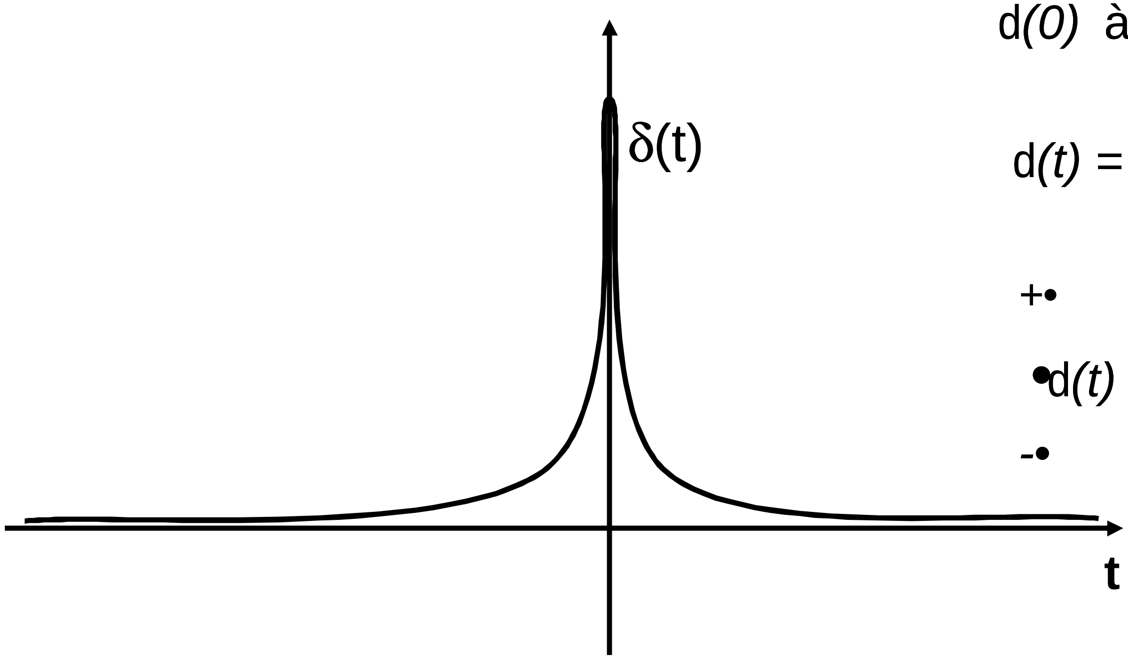
d*(0)* à ¥

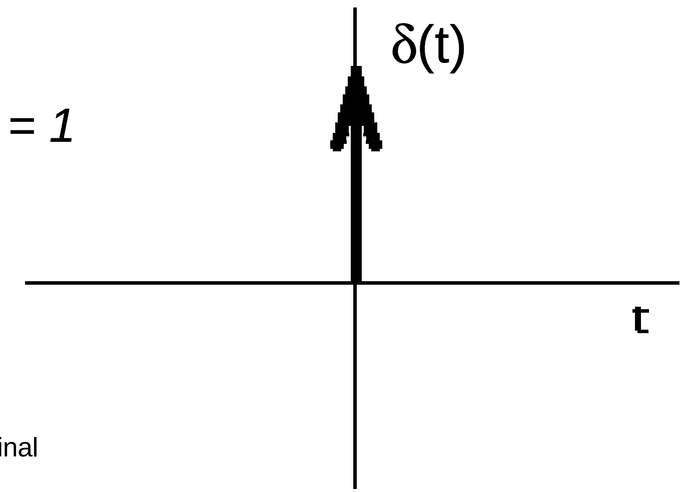
d*(t) = 0, t* ¹*0*

+•

•d*(t) dt = 1*

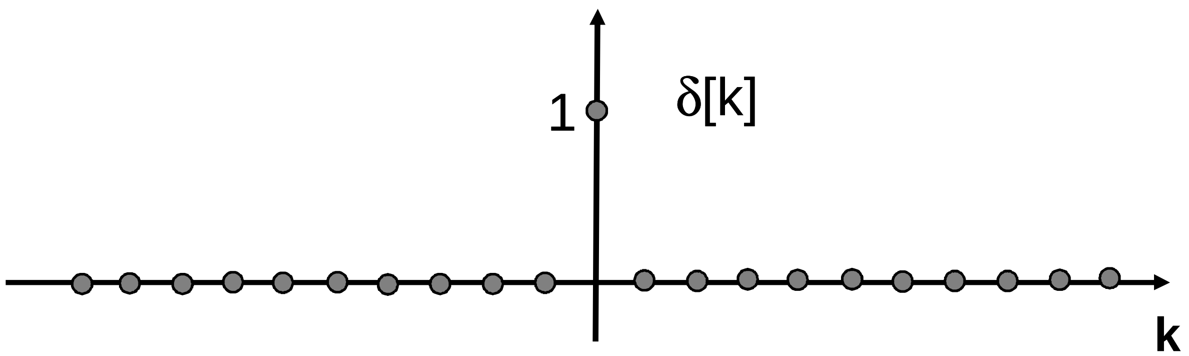
-•



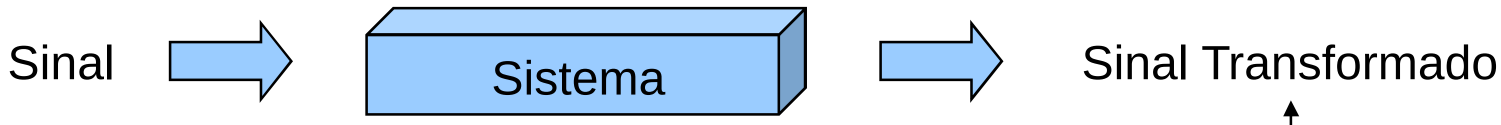


Sinais elementares: Impulso unitário

- Para sinais discretos o impulso δ[k] tem uma representação de interpretação mais simples:



Transformações na variável independente



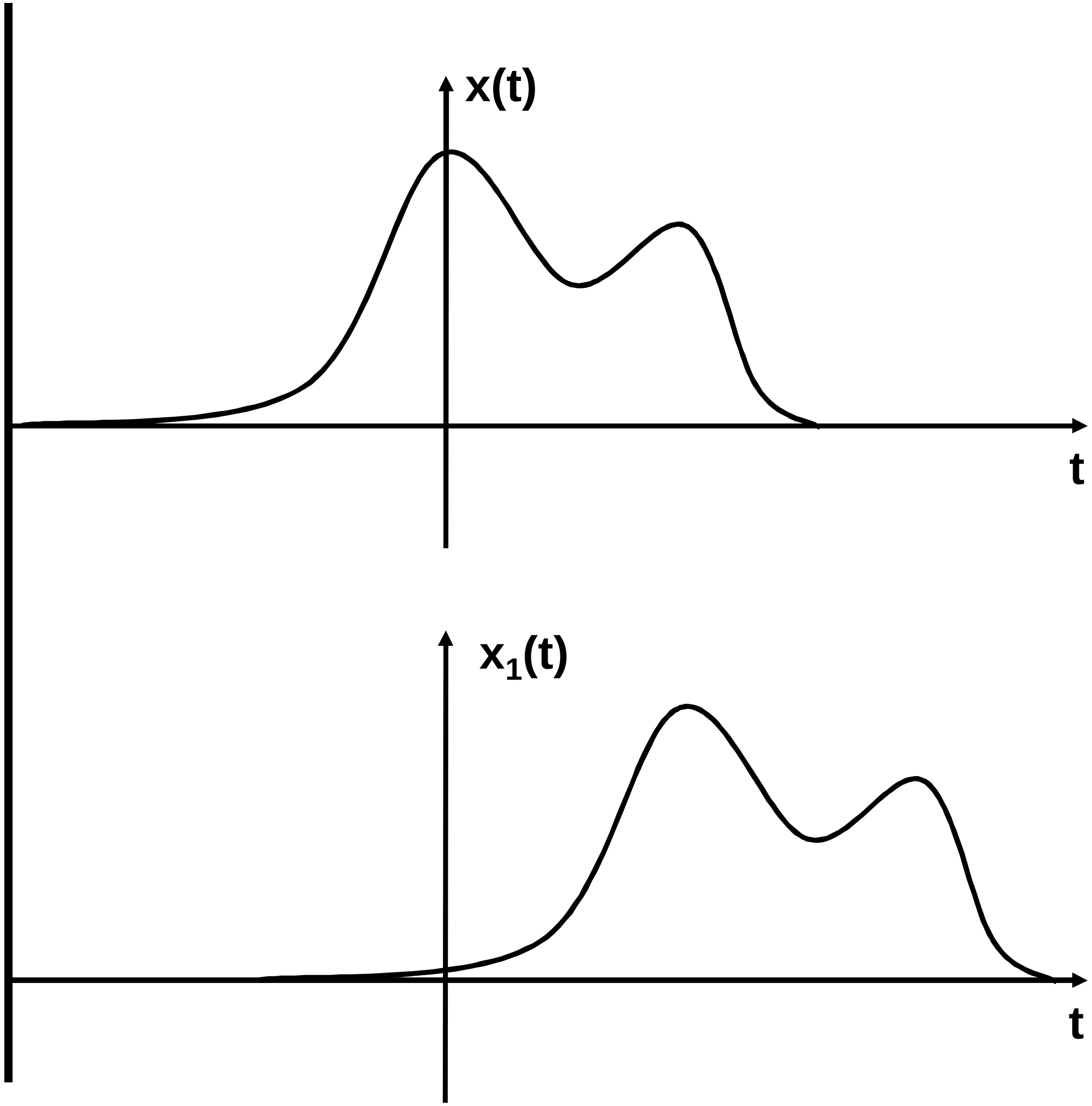
A maioria destas transformações ocorre na variável independente

Dado que a variável independente na presente descrição de sinais é o tempo, estas operações são descritas como:

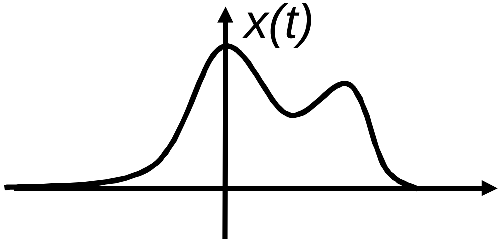
- **translação temporal**
- **inversão temporal**
- **escalonamento temporal**

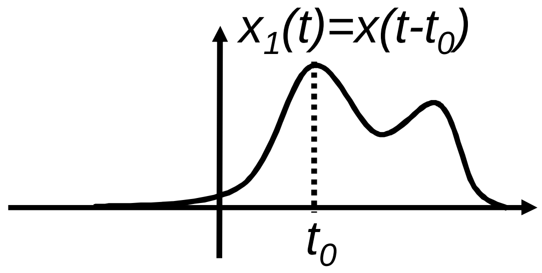
Transformações na variável independente

- translação temporal
- inversão temporal
- escalonamento temporal



Transformações na variável independente





- **translação temporal**
- **inversão temporal**
- **escalonamento temporal**

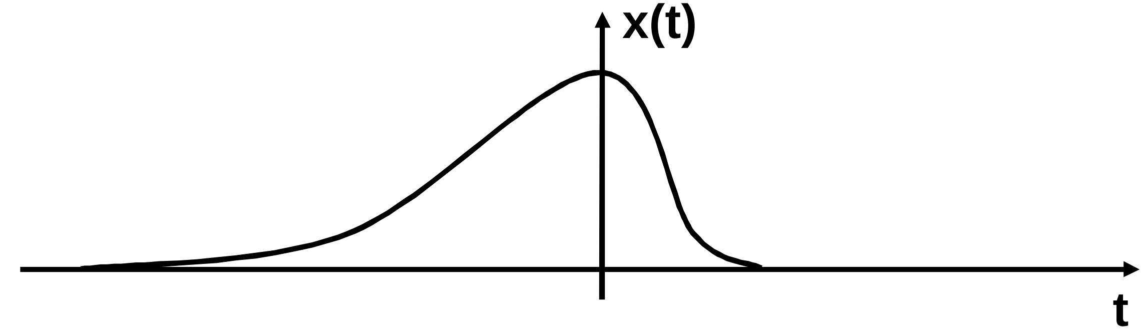
Considerando-se um sinal *x(t)*, uma representação deste sinal deslocado no tempo será um novo sinal $x_1(t)$ que se relaciona com o anterior por: $x_1(t)=x(t-t_0)$.

A translação no tempo é de t_0 segundos.

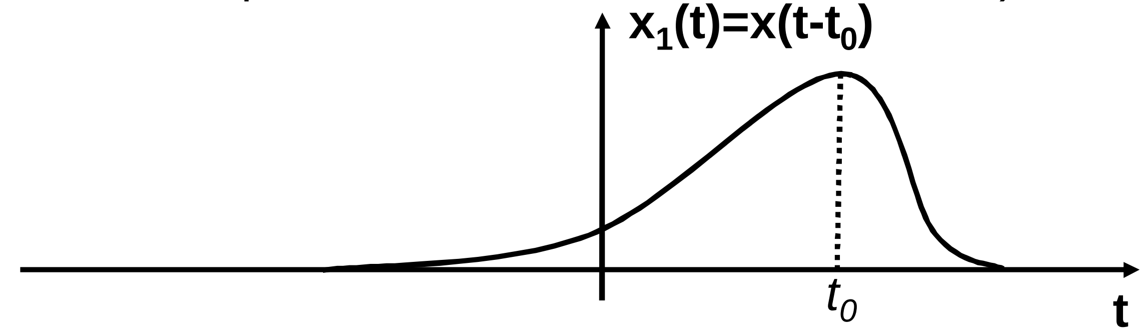
Para $t_0>0$ ocorre um atraso no sinal (sinal deslocado para a direita num sistema de eixos), para $t_0<0$ o sinal aparece adiantado (sinal deslocado para a esquerda).

Transformações na variável independente

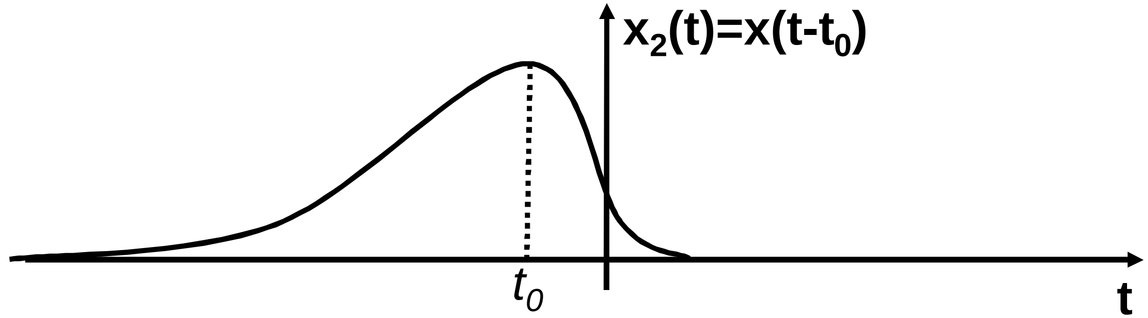
- translação temporal
- inversão temporal
- escalonamento temporal



Para $t_0>0$ ocorre um atraso no sinal (sinal deslocado para a direita num sistema de eixos).

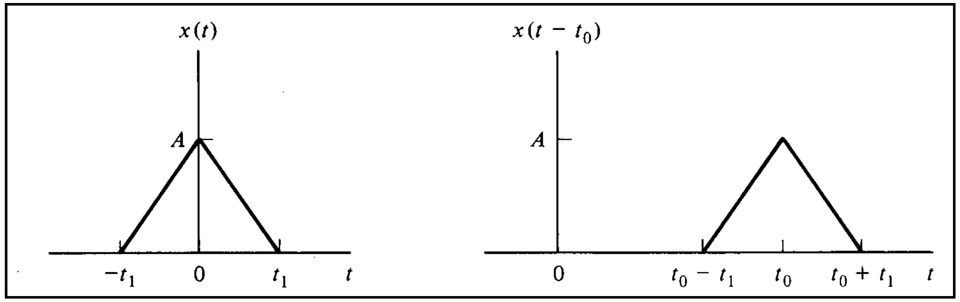


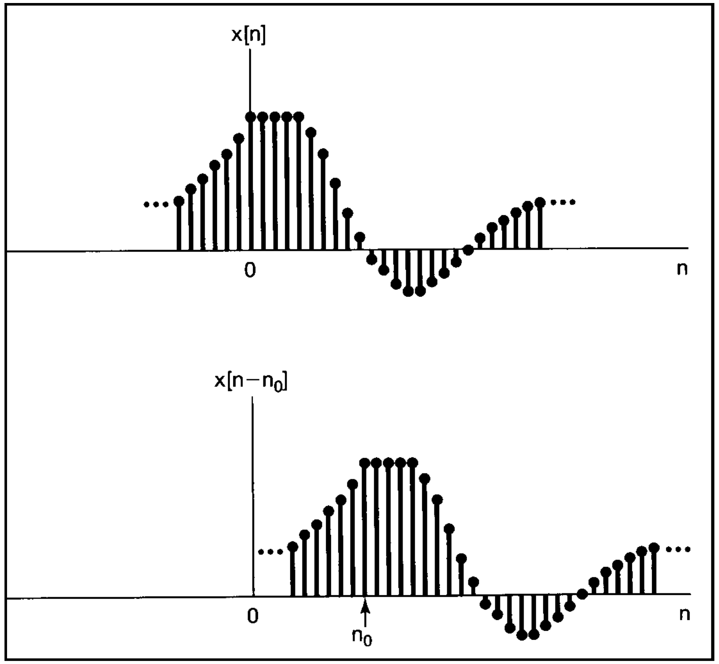
Para $t_0<0$ o sinal aparece adiantado (sinal deslocado para a esquerda).

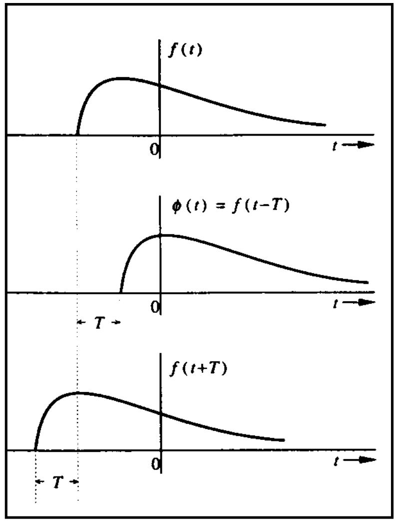


Transformações na variável independente

- **translação temporal**
- **inversão temporal**
- **escalonamento temporal**



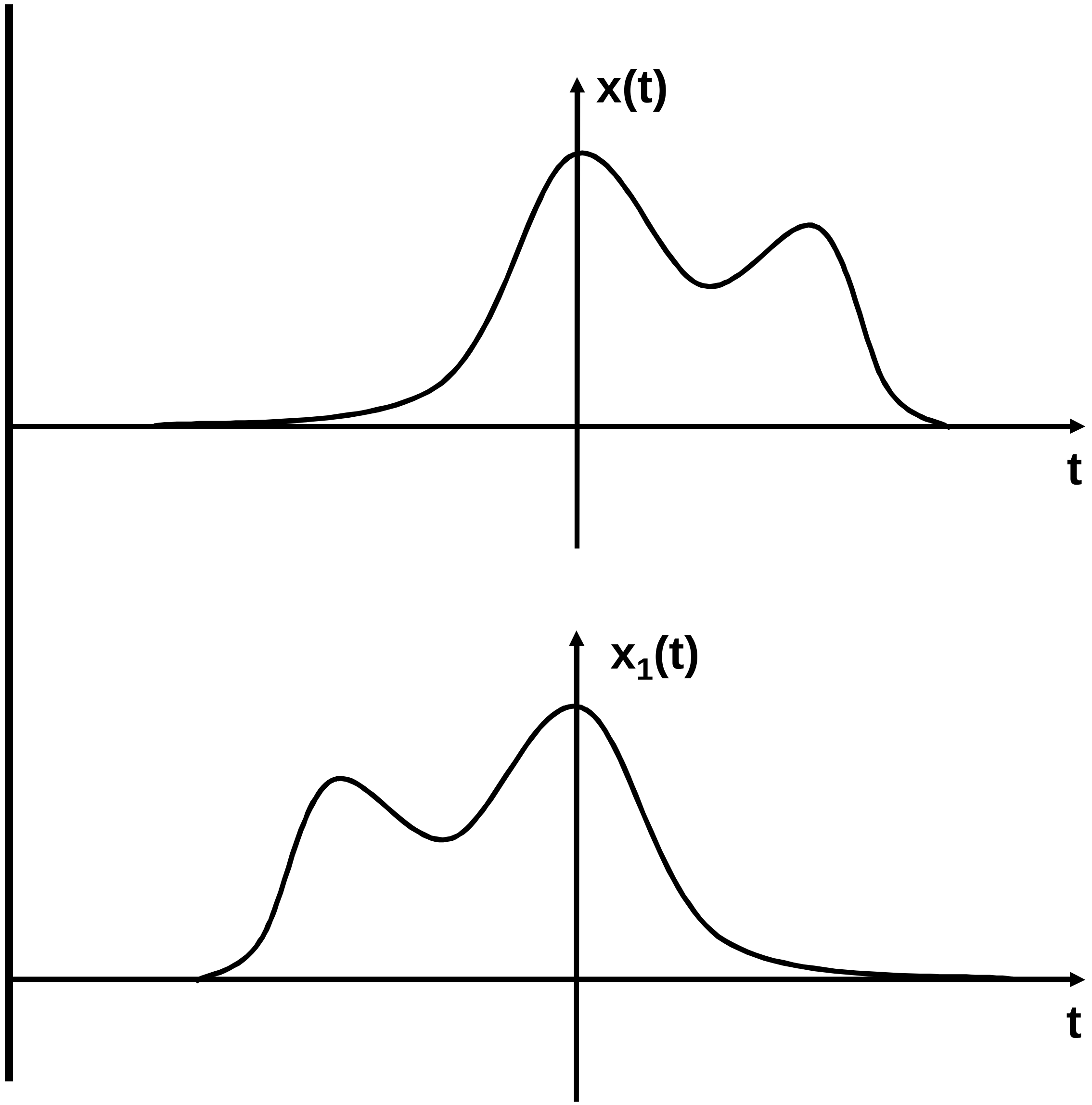




Note-se que a análise feita para tempo contínuo é também válida para tempo discreto. $x_1[k]=x[k-k_0]$

Transformações na variável independente

- translação temporal
- inversão temporal
- escalonamento temporal



Transformações na variável independente

- **translação temporal**
- **inversão temporal**
- **escalonamento temporal**

Da inversão temporal de x(t) obtém-se um novo sinal $x_1(t)$ que se relaciona com o anterior através de:
$x_1(t)=x(-t)$.

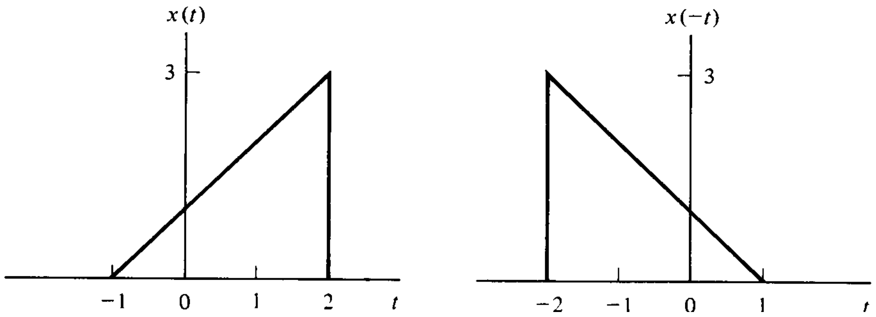
O sinal x(-t) é obtido a partir do sinal x(t) fazendo uma reflexão em t=0.

Note-se que o que quer que aconteça ao sinal original no instante *t*, acontece ao sinal invertido no instante –*t*. Assim, para inverter um sinal definido por uma expressão analítica, substitui-se *t* por –*t*.

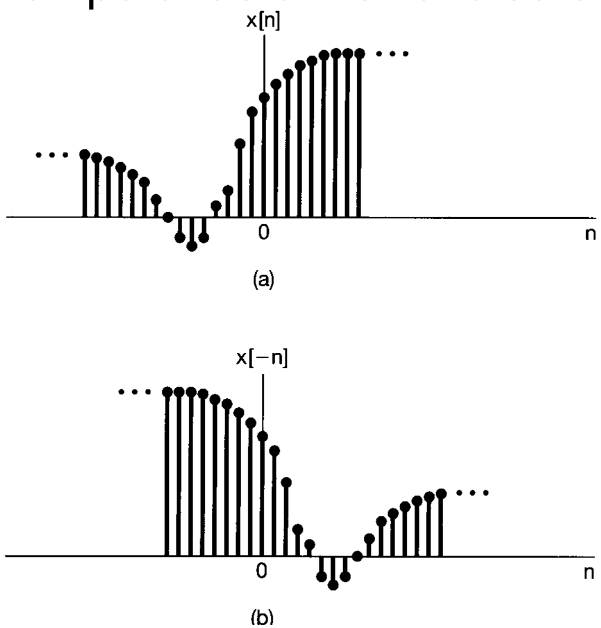
Transformações na variável independente

- translação temporal
- **inversão temporal**
- escalonamento temporal

Inversão temporal de um sinal contínuo



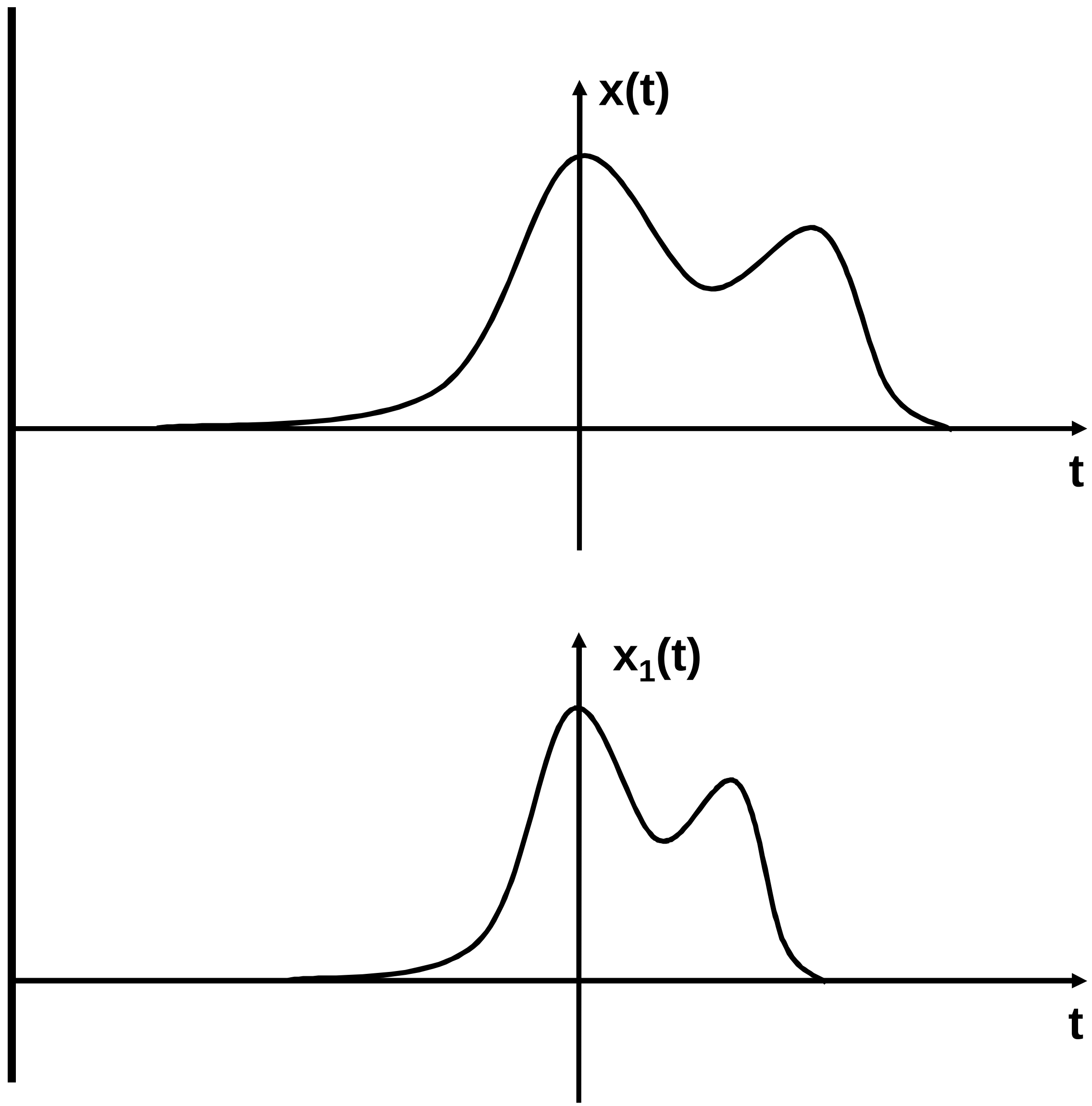
Inversão temporal de um sinal discreto



Note-se que a análise feita para tempo contínuo é também válida para tempo discreto. $x_1[k]=x[-k]$

Transformações na variável independente

- translação temporal
- inversão temporal
- escalonamento temporal



Transformações na variável independente

- translação temporal
- inversão temporal
- **escalonamento temporal**

A compressão ou expansão de um sinal é conhecida como escalonamento temporal.

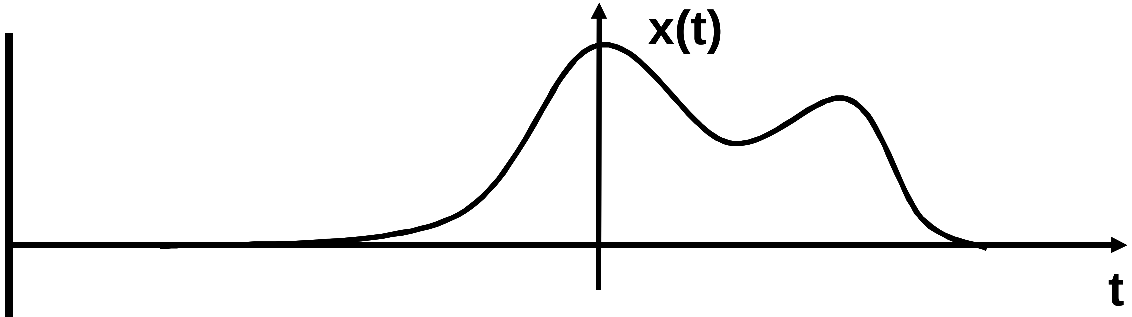
A variável independente é multiplicada por um factor K que produz o efeito de escalonamento.

• Para |K|>1, *x(Kt)* representará uma versão compactada de *x(t)* (o sinal existe num intervalo de tempo mais reduzido).

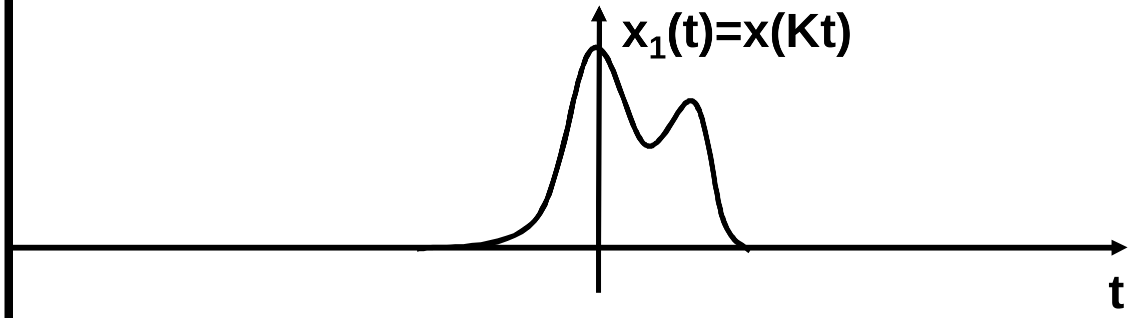
• Para |K|<1, *x(Kt)* representará uma versão expandida de *x(t)* (o sinal existe num maior intervalo de tempo).

Transformações na variável independente

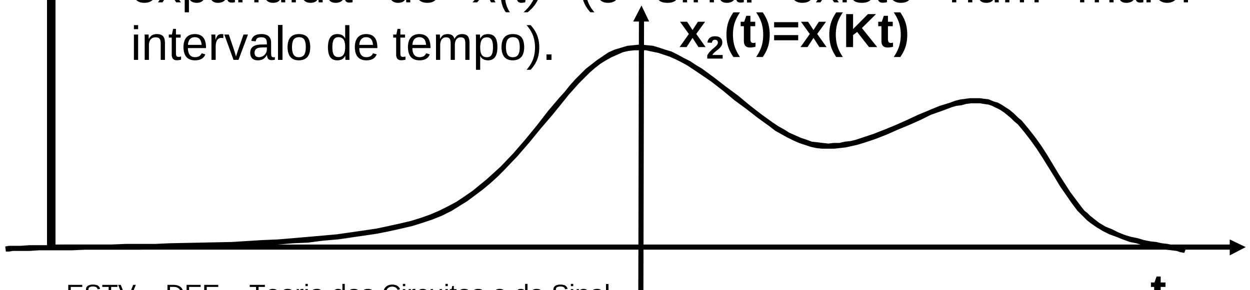
- translação temporal
- inversão temporal
- **escalonamento temporal**



Para $|K|>1$, *x(Kt)* representará uma versão compactada de *x(t)* (o sinal existe num intervalo de tempo mais reduzido).

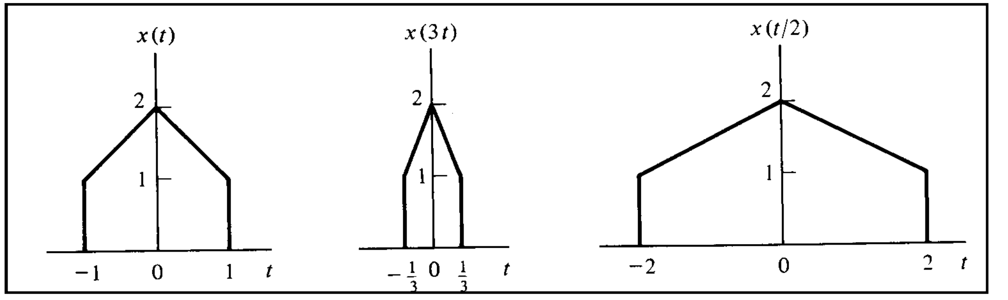


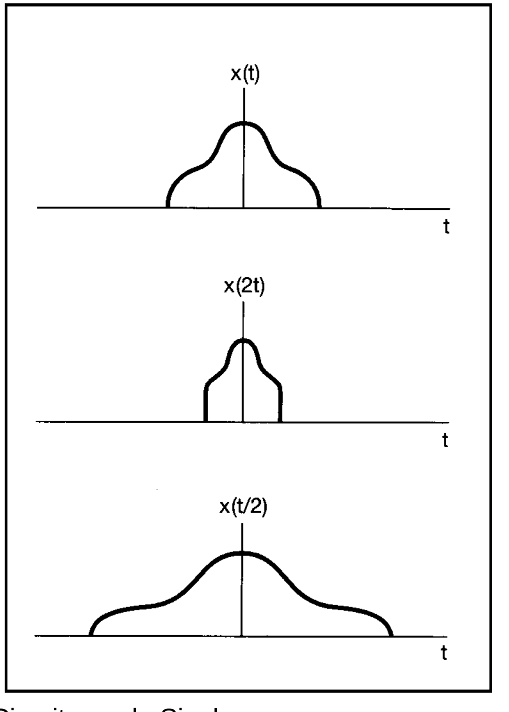
Para $|K|<1$, *x(Kt)* representará uma versão expandida de *x(t)* (o sinal existe num maior intervalo de tempo).



Transformações na variável independente

- translação temporal
- inversão temporal
- **escalonamento temporal**





Sistemas

- Um sistema pode ser caracterizado quanto ao **tipo de sinais de entrada e de saída**:

  - Sistema Contínuo

  - Sistema Discreto

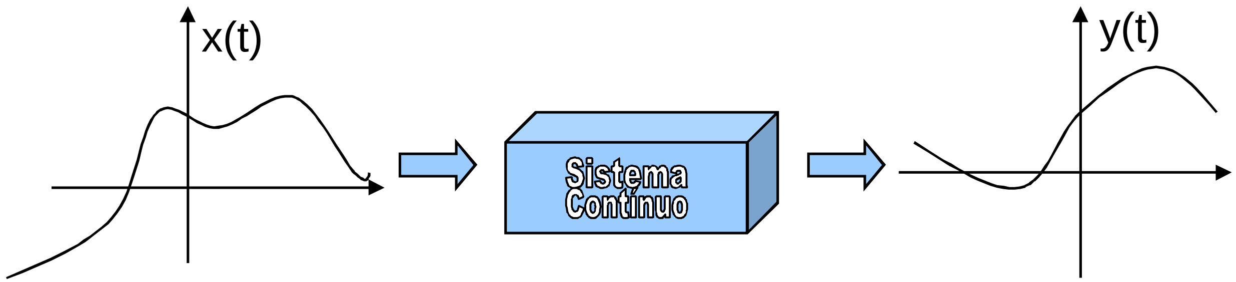
  - Sistema Analógico

  - Sistema Digital

Sistemas

- Sistema Contínuo
- Sistema Discreto
- Sistema Analógico
- Sistema Digital

Um **sistema de tempo-contínuo** é um sistema em que sinais de entrada temporalmente contínuos são transformados em sinais de saída contínuos.



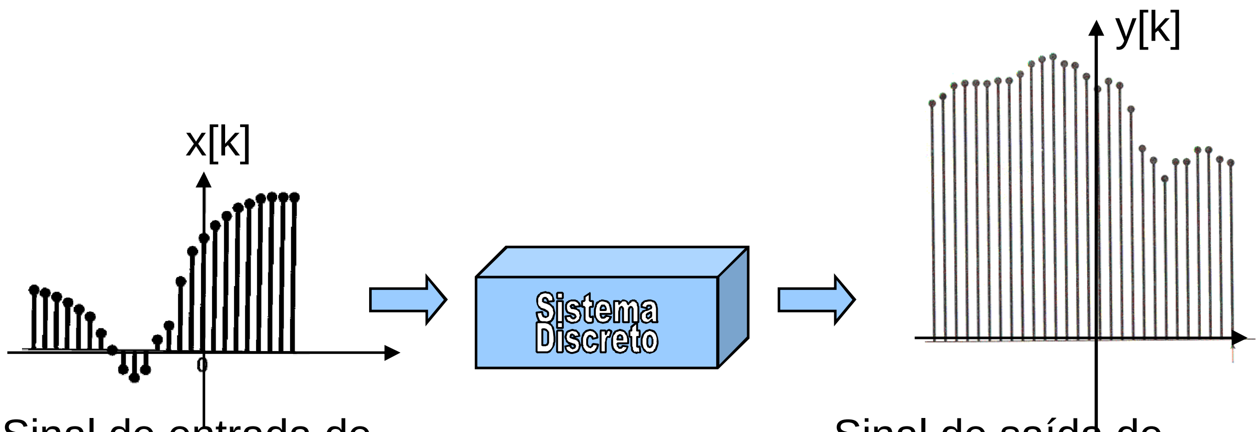
Sinal de entrada de tempo contínuo

Sinal de saída de tempo contínuo

Sistemas

- Sistema Contínuo
- Sistema Discreto
- Sistema Analógico
- Sistema Digital

um **sistema de tempo-discreto** transforma sinais discretos de entrada em sinais de saída também temporalmente discretos.



Sinal de entrada de tempo discreto

Sinal de saída de tempo discreto

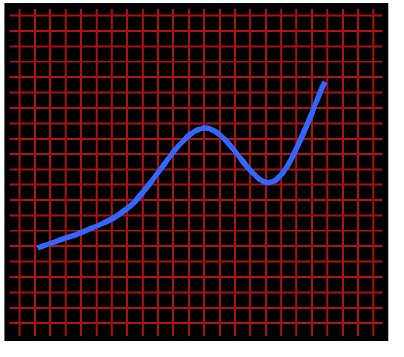
Sistemas

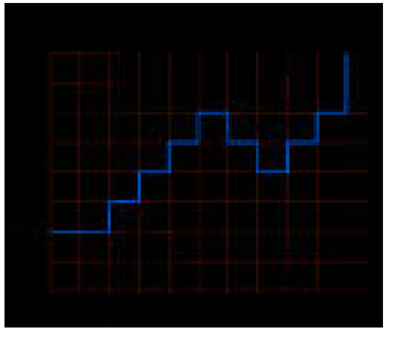
- Sistema Contínuo
- Sistema Discreto
- Sistema Analógico
- Sistema Digital

Um sistema cujos sinais de entrada e saída são analógicos é um **sistema analógico**. Um sistema cujos sinais de entrada e de saída são digitais é um **sistema digital**.

As expressões “tempo-contínuo” e “tempo-discreto” qualificam a natureza dos sinais ao longo do eixo temporal (eixo horizontal na representação comum de sinais).

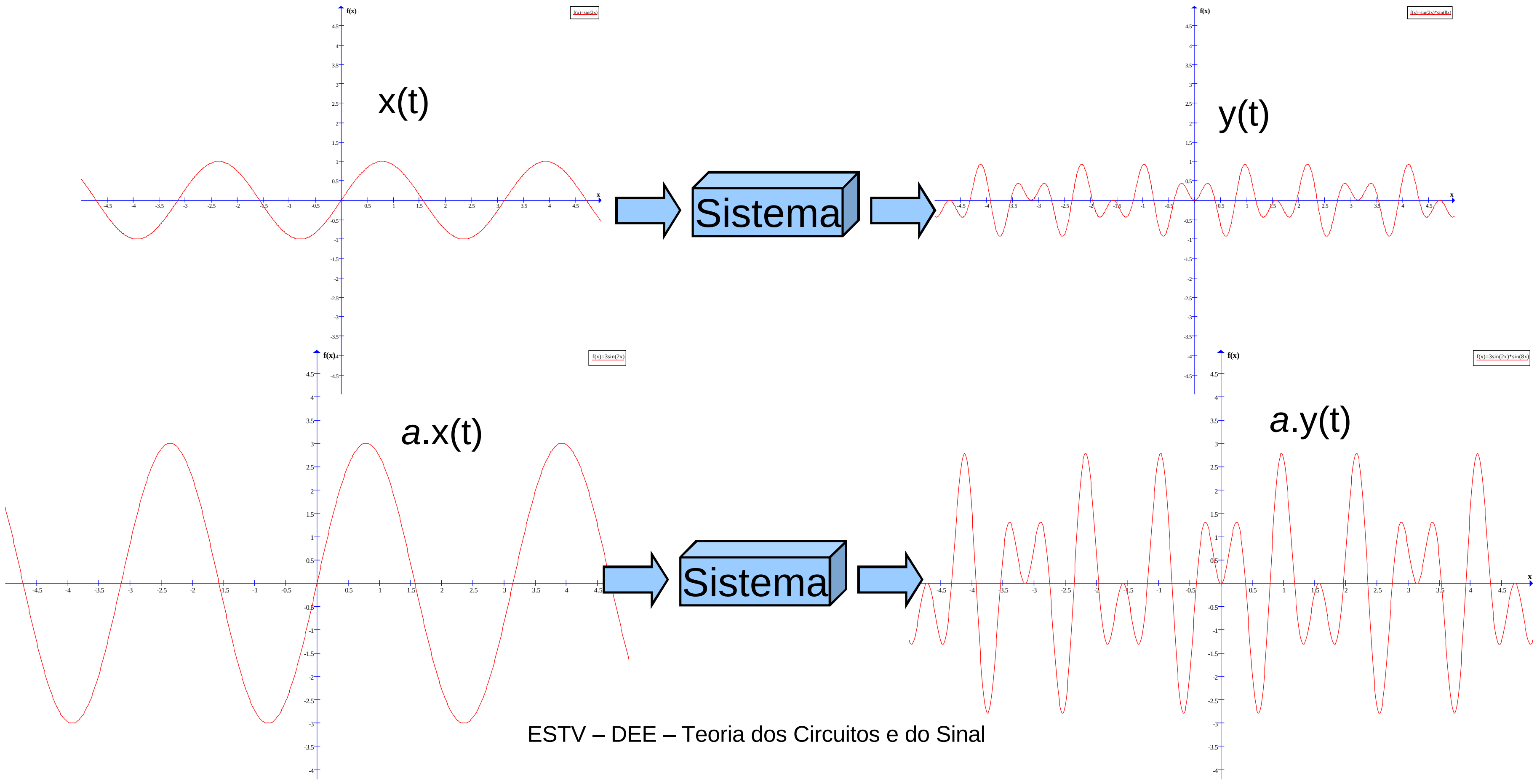
Os termos “**analógico**” e “**digital**” qualificam a natureza dos sinais quanto à amplitude (eixo vertical).





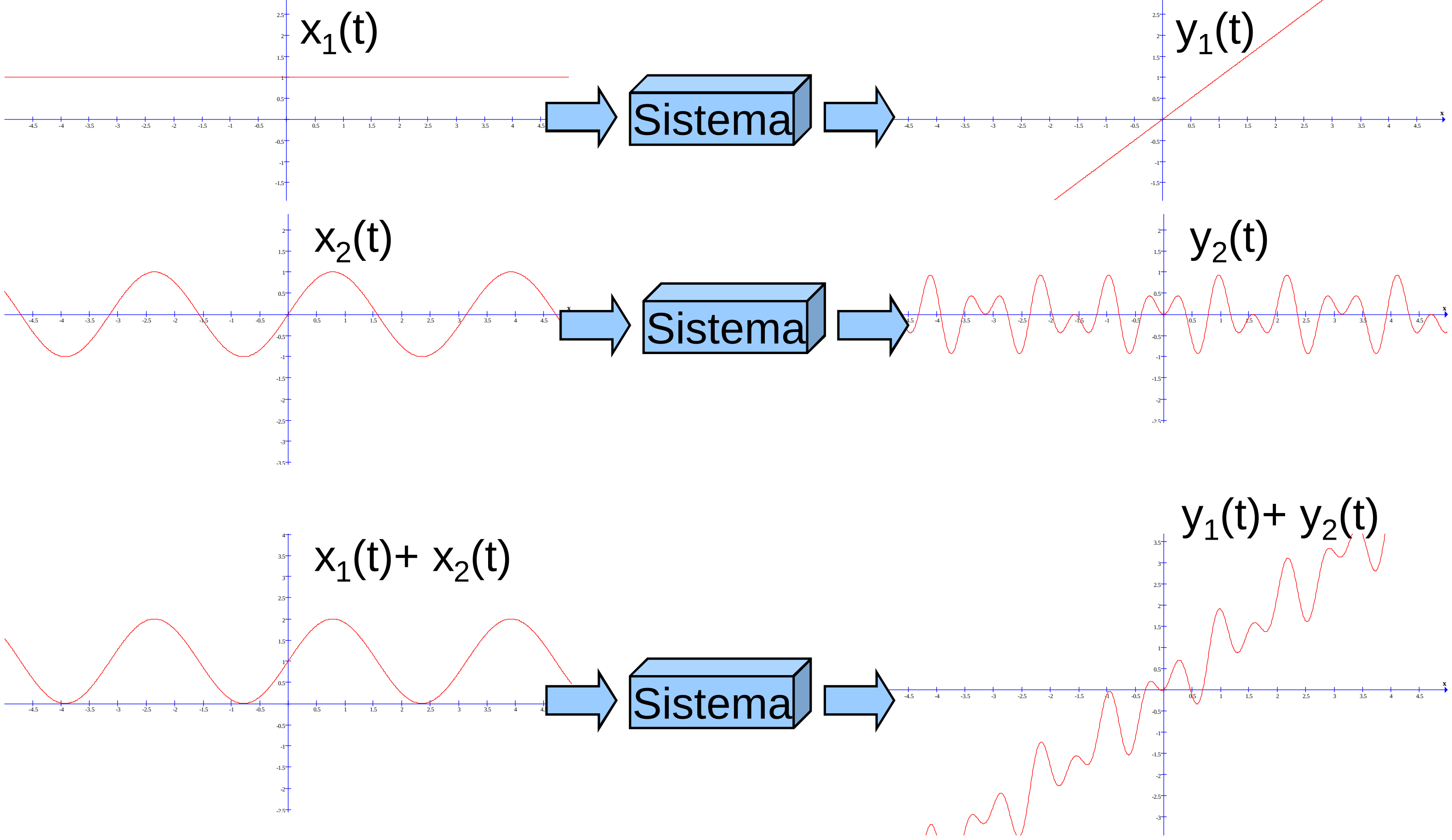
Sistemas

- Um sistema diz-se homogéneo se para qualquer entrada x(t) (que produz uma saída y(t) no sistema) e qualquer número real a, a resposta do sistema à entrada ax(t) seja ay(t).



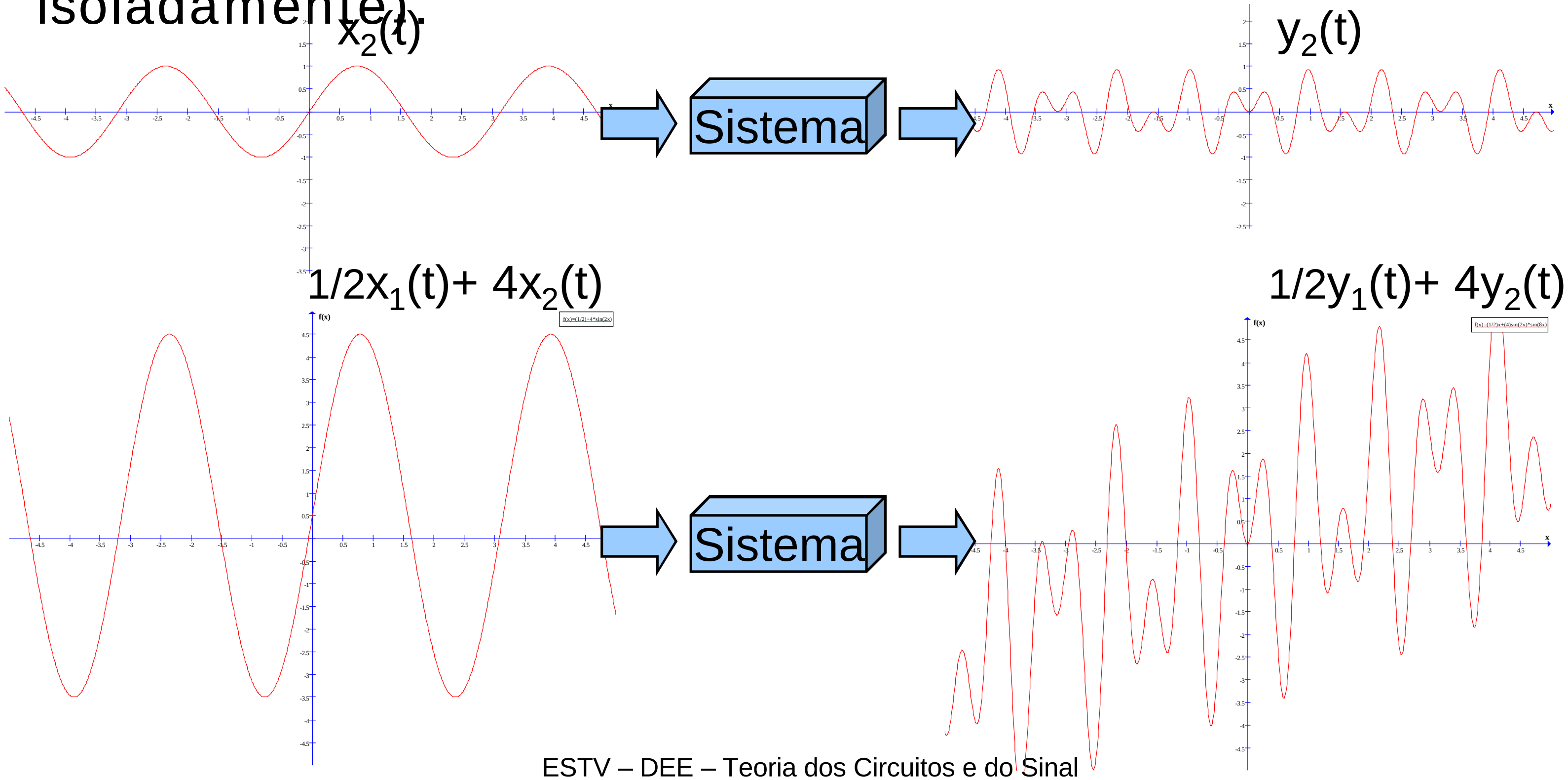
Sistemas

- Um sistema diz-se *aditivo* se para quaisquer dois sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$, a resposta à soma das entradas $x_1(t)+x_2(t)$ é igual à soma das respostas a cada sinal.



Sistema Linear

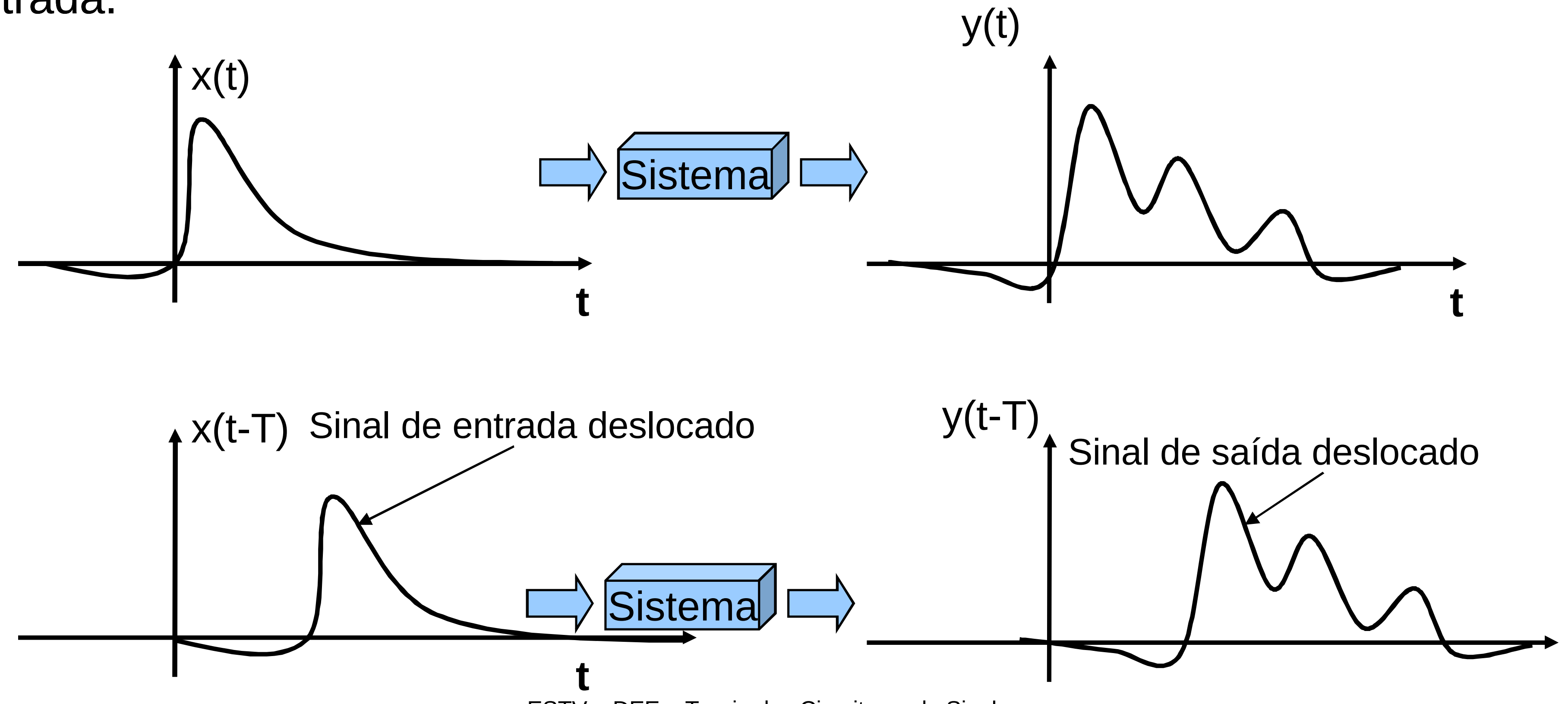
- Um sistema é linear se for simultaneamente aditivo e homogéneo, ou seja, para quaisquer sinais de entrada $x_1(t)$, $x_2(t)$ e quaisquer valores escalares a_1, a_2, a resposta à entrada $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ é $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$ (sendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ as respostas do sistema aos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ isoladamente).



Sistema Invariante no Tempo

- Um sistema é dito invariante no tempo se uma translação temporal no sinal de entrada causa uma translação idêntica no sinal de saída.

Se y(t) é a saída correspondente à entrada x(t), um sistema invariante no tempo apresentará uma saída y(t-T) quando x(t-T) for a sua entrada.



Sistemas com e sem Memória

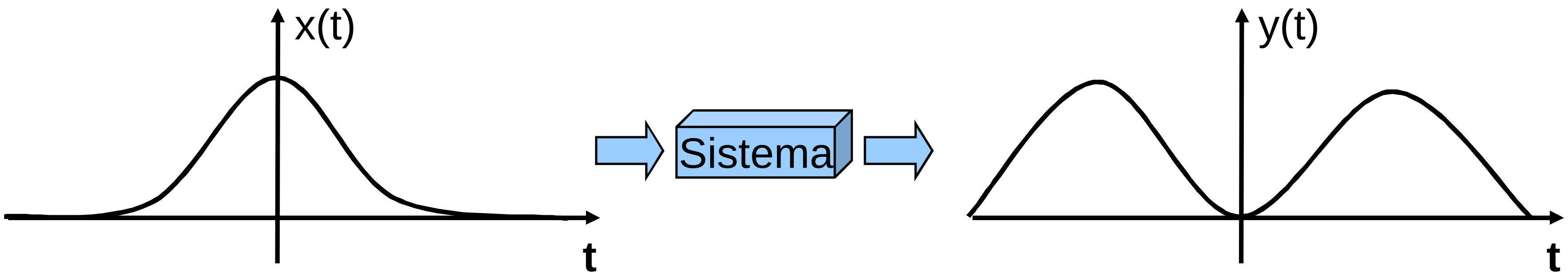
- Se a saída de um sistema num instante t depende apenas da entrada nesse instante o sistema é chamado **sem memória**.

- Um sistema cuja saída em t é completamente determinada pelos sinais de entrada durante os T segundos prévios, [intervalo de (t-T) até t] é um **sistema de memória finita** com memória de T segundos.

- Classifique quanto à memória o sistema descrito pela seguinte relação entre o sinal de entrada (x(t)) e o sinal de saída (y(t)):
  - $y(t) = 12 + 5x(t-1)$

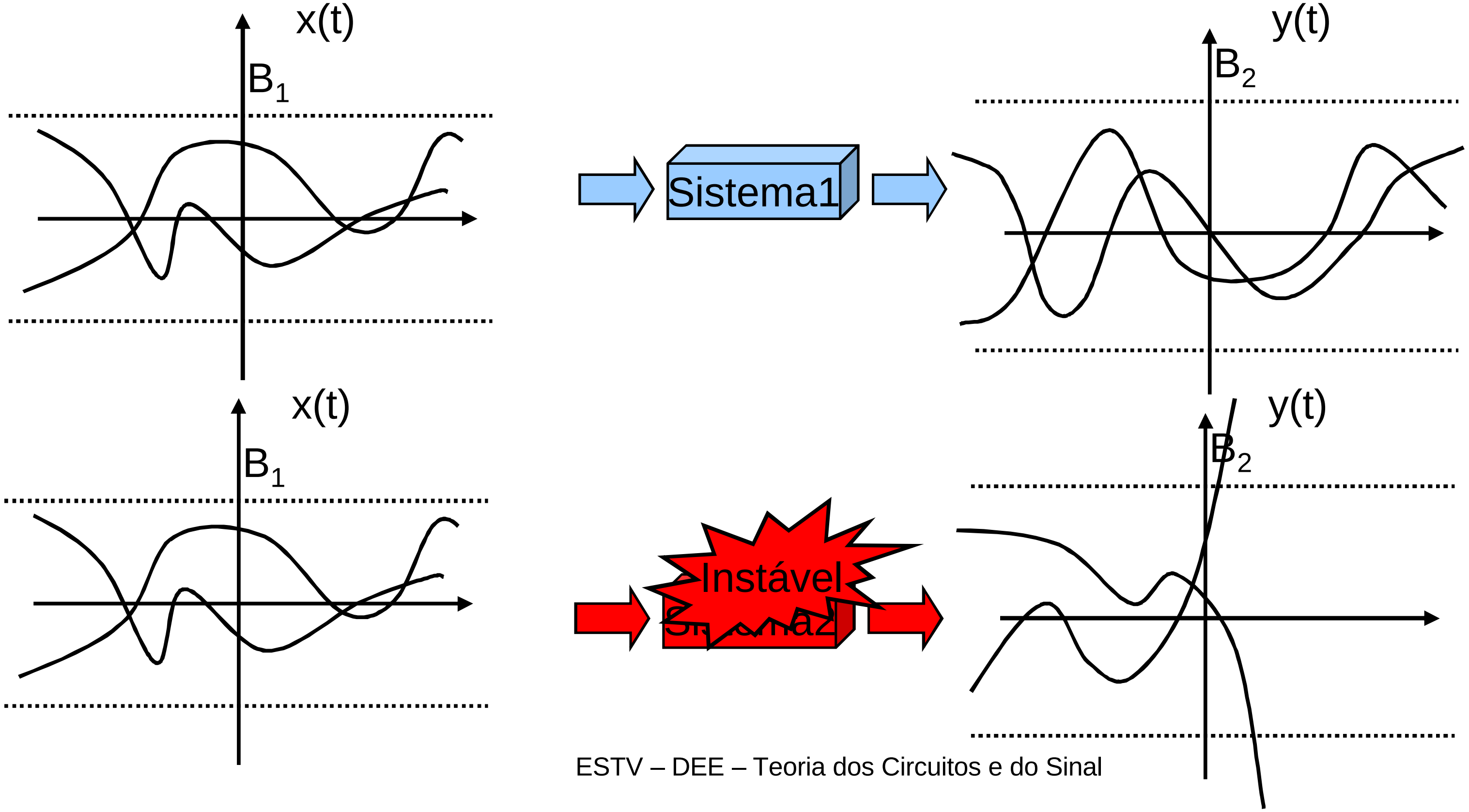
Sistemas causais e não causais

- Um sistema diz-se **causal** se para um instante t_1, a saída do sistema $y(t_1)$ resultante da entrada $x(t)$ não depende de valores de $x(t)$ posteriores a t_1 $(t>t_1)$.



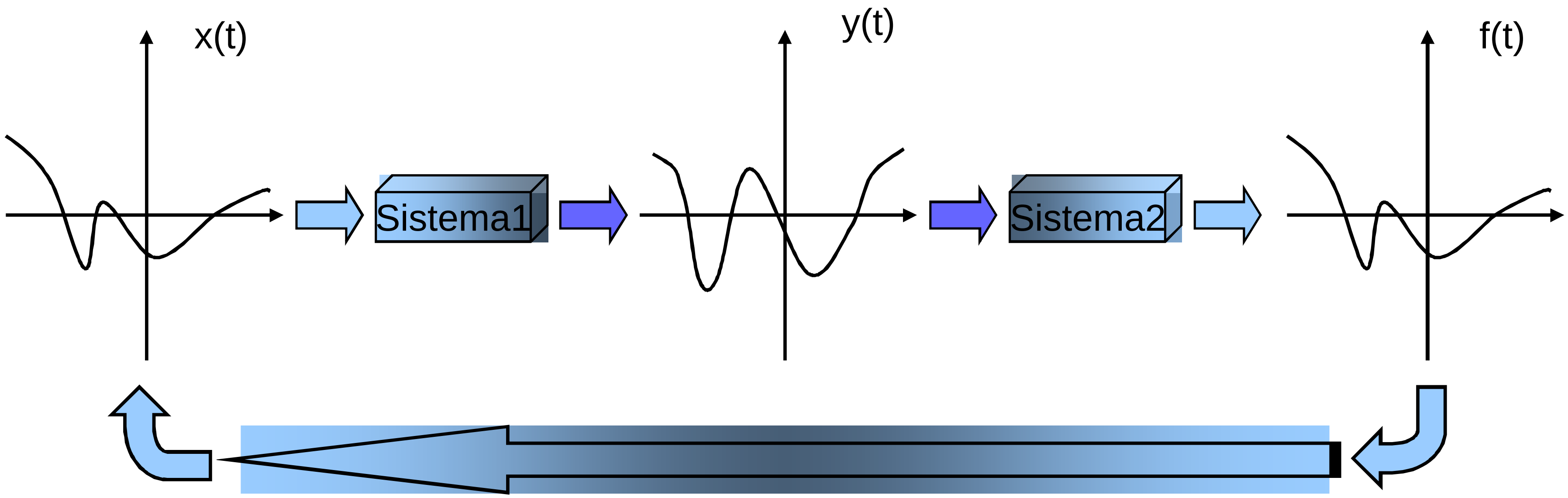
Sistemas estáveis e instáveis

- Um sistema é estável se, para qualquer sinal de entrada de amplitude limitada, a resposta do sistema y(t), é também de amplitude limitada:



Sistemas Inversos

- Um sistema é inversível se, a partir da sua saída, se consegue determinar qual a entrada que lhe deu origem. Isto implica que é possível construir um sistema inverso que quando ligado em série com o primeiro sistema permite obter o sinal original.



f(t) =x(t)

O *Sistema2* é **inverso** do *Sistema1*

Sumário

- Definição de Sinal
- Definição de Sistema (Circuito)
- Caracterização de sinais:
  - Contínuos/Discretos
  - Periódicos/Aperiódicos
  - Analógicos/Digitais
- Transformações na variável independente:
  - Translacção temporal
  - Escalonamento temporal
  - Inversão temporal

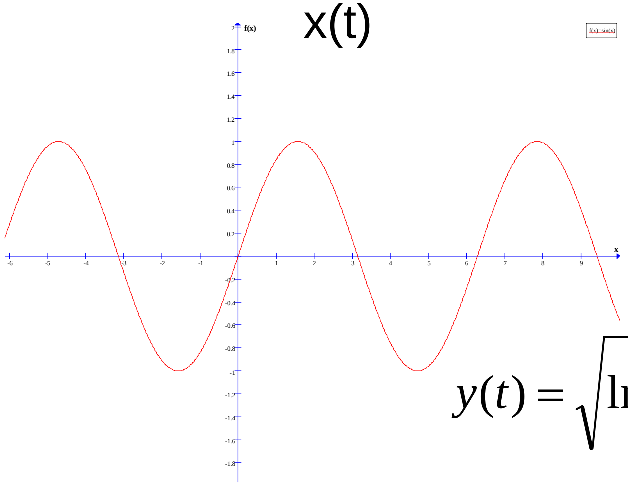
Sumário

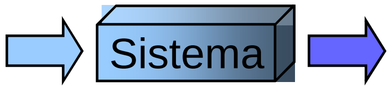
- Sistemas
  - Contínuos/Discretos
  - Analógicos/Digitais
  - Lineares/Não lineares
  - Variantes/Invariantes no tempo
  - Com/Sem memória
  - Causais e não causais
  - Estáveis/Instáveis
  - Inversos

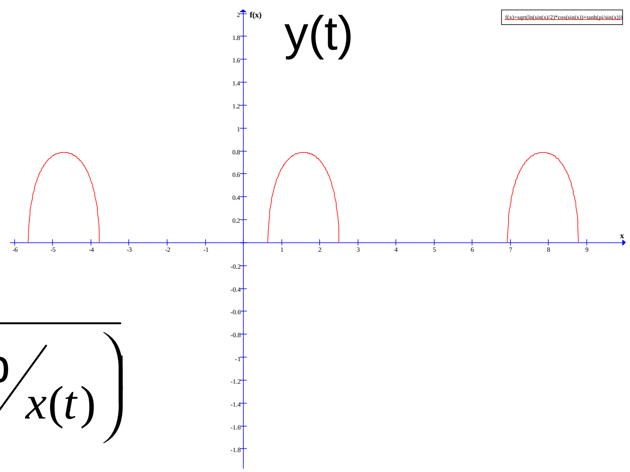
Modelo de Sistemas

- A teoria dos sistemas visa uma variedade de sistemas, desde eléctricos, mecânicos, hidráulicos, acústicos, electromecânicos, químicos, e ainda sociais, económicos e biológicos.

- O primeiro passo para a análise de um sistema é a construção do **modelo do sistema**, que é geralmente uma **expressão matemática** que aproxima o desempenho dinâmico do sistema.







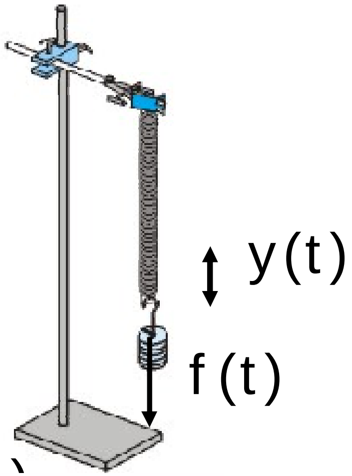
$$y(t)=\sqrt{\ln\left(\frac{x(t)}{2}\right)\cdot\cos\left(x(t)\right)+\tanh\left(\frac{\pi}{x(t)}\right)}$$

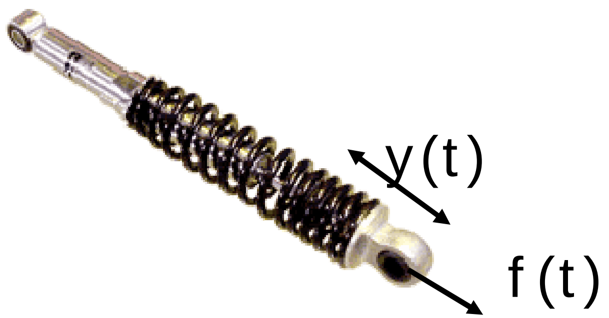
Exemplo de Descrição Matemática de Sistemas

- **Sistema mecânico translacional**

Os elementos básicos de modelação de sistemas mecânicos translacionais são massas, molas e amortecedores.

Nas expressões seguintes: *M é a massa, K* é a constante de elasticidade da mola e *B* é o coeficiente de amortecimento do amortecedor.





$$Ky(t) = f(t)$$

Relação linear
Componente diferencial de ordem 0

$$B\frac{dy(t)}{dt} = f(t)$$

Componente diferencial (1ª ordem)

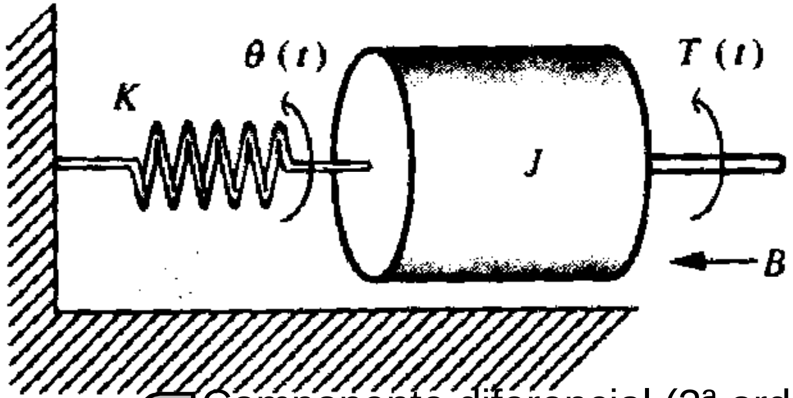
Componente diferencial (2ª ordem)

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = f(t)$$

Exemplo de Descrição Matemática de Sistemas

- Sistema mecânico rotacional

- Relação entre o binário de entrada (T - torque) e o ângulo de saída (θ) no sistema ilustrado na figura



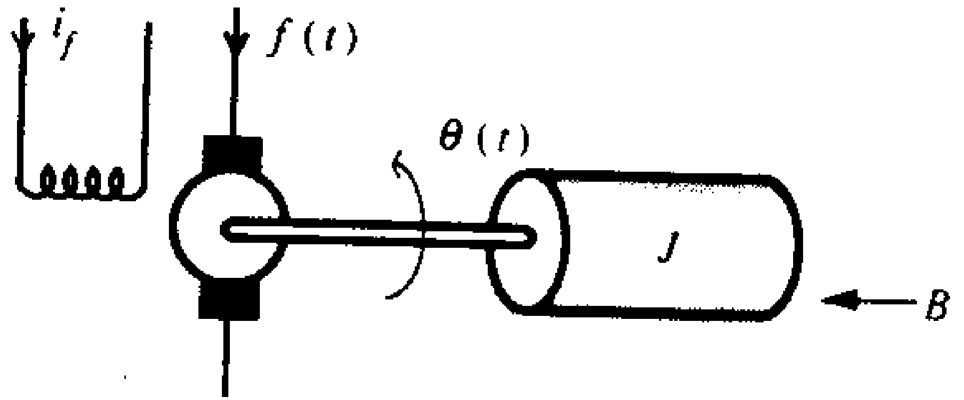
Componente diferencial (2ª ordem)

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} + K\theta(t) = T(t)$$

Componente diferencial
(1ª ordem)

Exemplo de Descrição Matemática de Sistemas

- **Sistema electromecânico**
- Uma vasta variedade de sistemas electromecânicos convertem sinais eléctricos em movimento mecânico e vice-versa.



Componente diferencial (2ª ordem)

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} = K_T i(t)$$

Componente diferencial
(1ª ordem)

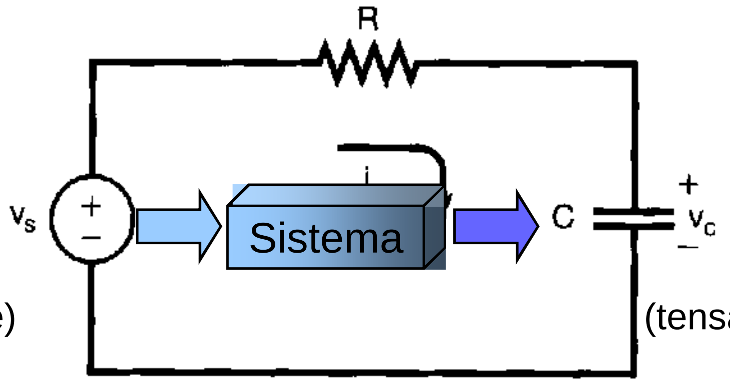
Exemplo de Descrição Matemática de Sistemas

- No curso de Eng. Electrotécnica serão naturalmente mais comuns os sistemas eléctricos.

- Também estes assumem uma descrição diferencial.

Sinal de entrada
$x(t) = V_s$

(tensão aos terminais da fonte)

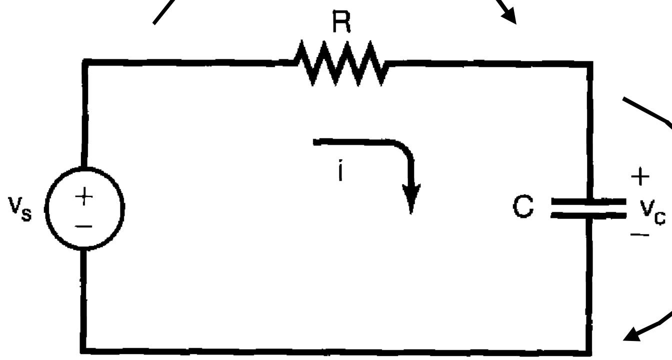


Sinal de saída
$y(t) = V_C$

(tensão aos terminais do condensador)

Exemplo de Descrição Matemática de Sistemas

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} \Leftrightarrow i_R(t) = \frac{v_s(t) - v_C(t)}{R}$$



$$i_C(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = i_C(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{v_s(t) - v_C(t)}{R} = C\,\frac{dv_C(t)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

Dado que $V_s = x(t)$ e que $V_c = y(t)$,
a equação tem uma descrição genérica:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

onde a=1/RC e b=1/RC

Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes – forma geral

- Os exemplos anteriores demonstram que um sistema de tempo-contínuo pode ser descrito pela equação diferencial que relaciona a entrada com a saída, que tem a forma genérica:

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_M\frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1}\frac{d^{M-1}x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

- O símbolo d/dt representa a operação de diferenciação.
- Substitui-se esta notação por D, obtendo-se uma expressão mais compacta:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0)x(t)$$

Derivadas de várias ordens da saída y(t) (até à ordem N)

Derivadas de várias ordens da entrada x(t) (até à ordem M)

Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes – forma geral

- Uma classe significativa de sistemas pode então ser descrita por equações diferenciais, que no operador D assumem a forma genérica:

$$\underbrace{\left(D^{N} + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)}_{Q(D)} y(t) = \underbrace{\left(b_M D^{M} + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0\right)}_{P(D)} x(t)$$

- Com as seguintes atribuições polinomiais:

$$Q(D) = D^{N} + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

$$P(D) = b_M D^{M} + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0$$

Obtém-se uma nova equação diferencial que determina comportamento do sistema:

$$Q(D).y(t) = P(D).x(t)$$

Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes – forma geral

Sistema

- O primeiro passo na análise de um sistema é determinar a equação diferencial que rege o seu comportamento

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_M\frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1}\frac{d^{M-1}x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

- Para simplificação da notação, passa-se a equação diferencial para o operador D

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0)x(t)$$

- Atribuindo os polinómios Q(D) e P(D) obtém-se uma nova expressão

$$Q(D).y(t) = P(D).x(t)$$

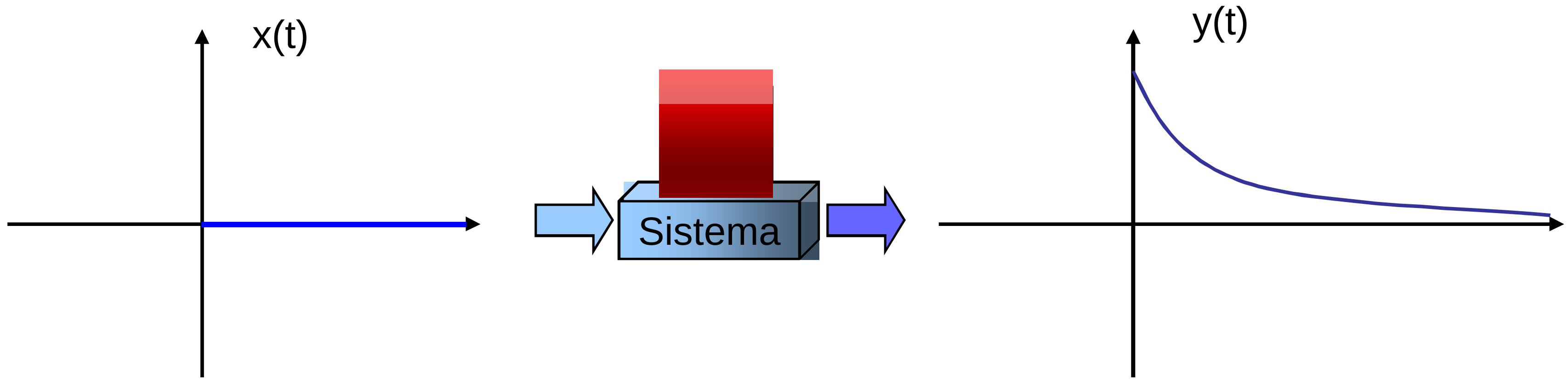
- Do polinómio Q(D), de P(D) e da relação entre ambos, será possível extrair toda a informação sobre o sistema. Estes polinómios são portanto **fundamentais** no seu estudo.

Resposta de um sistema descrito por equações diferenciais a um sinal de entrada

- A saída de um sistema para $t \geq 0$ é resultado de duas causas independentes:
  - a resposta a entrada-nula: resulta apenas das condições iniciais em $t=0$ com o sinal de entrada $x(t)=0$ para $t \geq 0$ (devida a propriedades internas do sistema como seja a existência de armazenamento de energia – bobinas e condensadores em circuitos eléctricos, molas em sistemas mecânicos, etc)
  - a resposta a estado-nulo: resulta apenas da entrada $x(t)$ para condições iniciais nulas em $t=0$.

Resposta a entrada-nula

- Mesmo <u>sem uma entrada</u>, um sistema pode apresentar um sinal de saída, para $t \geq 0$, devido a armazenamento interno de energia.

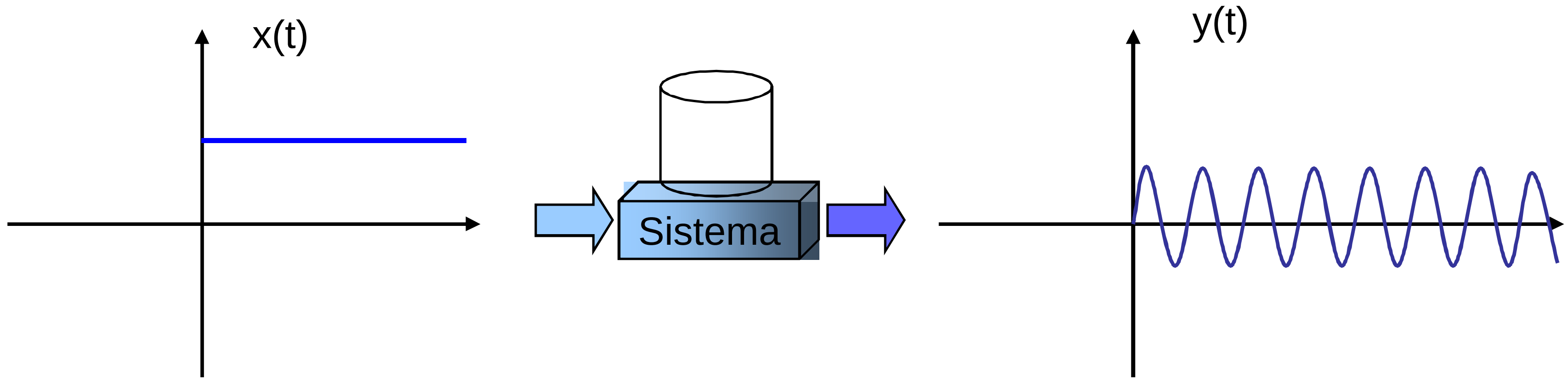


- Esta resposta do sistema, que ocorre sem um sinal de entrada, é designada por:

Resposta a entrada-nula

Resposta a estado-nulo

- Naturalmente, um sistema, mesmo tendo um estado inicial nulo (sem energia armazenada), responde a um sinal de entrada.

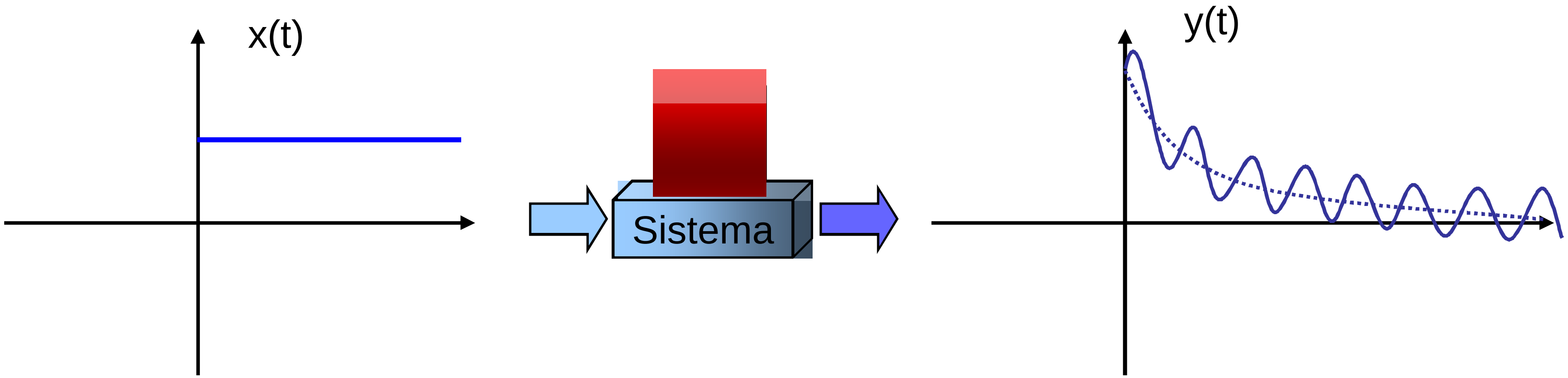


- Esta resposta do sistema, na ausência de um estado enegético inicial, é designada por:

Resposta a estado-nulo

Resposta total de um sistema

- A resposta de um sistema com estado inicial não nulo (com energia armazenada), a um sinal de entrada, será a soma da resposta a entrada-nula com a resposta a estado-nulo.



Resposta Total = Resposta a estado-nulo + Resposta a entrada-nula

Resposta total de um sistema

- As duas componentes da resposta de um sistema são independentes uma da outra, podendo uma ser calculada independentemente da outra.

- Para o cálculo da resposta de um sistema para certas condições iniciais e determinado sinal de entrada, pode **calcular-se separadamente** o sinal gerado na saída e depois somar os sinais resultantes (de resposta a entrada-nula e de resposta a estado-nulo).

Resposta Total = Resposta a estado-nulo + Resposta a entrada-nula

Resposta a entrada-nula ($y_0(t)$) de um sistema

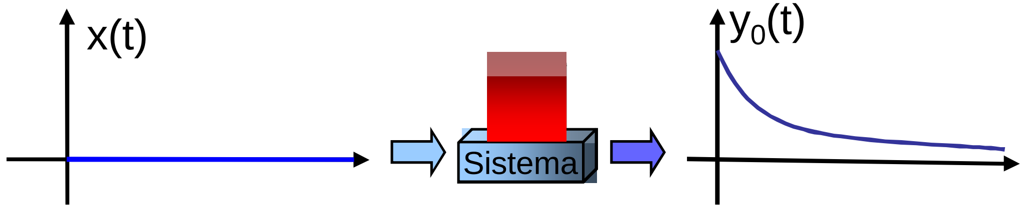
- Um sistema é descrito pela equação diferencial no operador D:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0)x(t)$$

- Recorrendo aos polinómios Q(D) e P(D), a expressão anterior assume a forma:

$$Q(D).y(t) = P(D).x(t)$$

- Relembrando o conceito de resposta a entrada-nula:



- Para determinar a expressão analítica da resposta a entrada-nula, que designaremos por $y_0(t)$, a partir da equação do sistema, teremos de fazer x(t)=0, obtendo-se a expressão:

$$Q(D)\cdot y(t) = P(D)\cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$Q(D)\cdot y_0(t) = 0$$

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y_0(t) = 0$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de 1ª ordem

- Um sistema de primeira ordem terá na expressão que descreve o seu comportamento derivadas até à primeira ordem de derivação no sinal de saída.

Sistema de ordem N:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0)x(t)$$

Sistema de 1ª ordem:

$$\left(D + a_0\right)y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0)\overbrace{x(t)}^{=0}$$

- Assim, a procura da resposta a entrada-nula passa por determinar a saída y(t) na equação anterior, para uma entrada nula:

$$(D + a_0)y_0(t) = 0$$

- No operador d/dt obtém-se então a expressão:

$$\frac{dy_0}{dt} + a_0 y_0(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{dt} = -a_0 y_0(t)$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de 1ª ordem

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = -a_0 y_0(t)$$

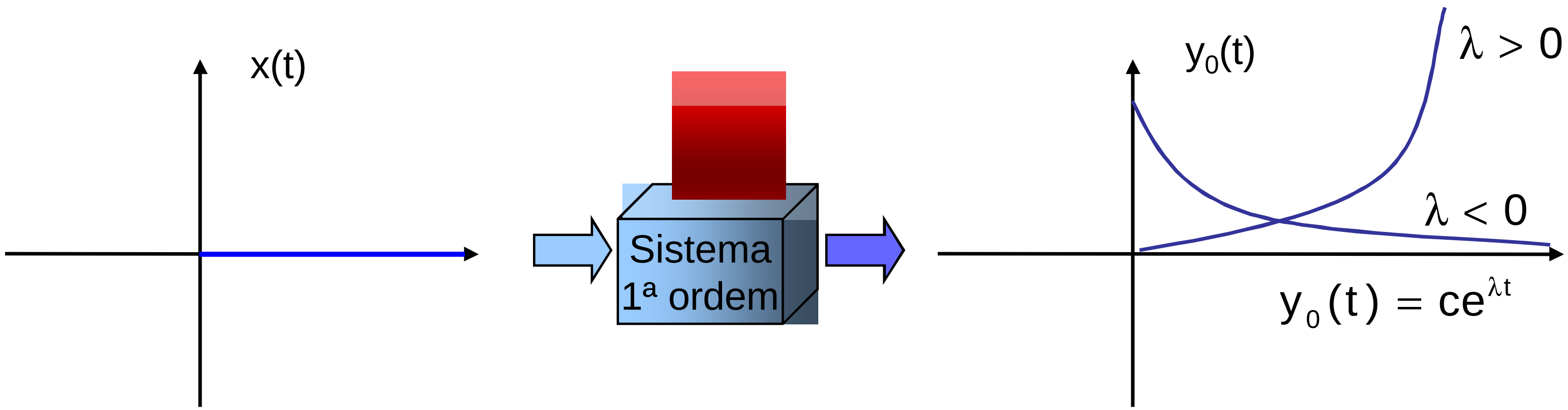
- A equação mostra que a resposta a entrada nula $y_0(t)$ é uma função cuja derivada é da mesma forma que ela própria (a menos de uma constante multiplicativa: $-a_0$).

- Que função apresenta esta propriedade?
- A função exponencial. Vamos portanto assumir que a solução daquela equação será da forma:

$$y_0(t) = \underbrace{ce^{\lambda t}}_{\text{Exponencial genérica}}$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de 1ª ordem

- Conclui-se então que a resposta a entrada-nula de um sistema de 1ª ordem não assume uma qualquer forma, mas sim a forma de uma exponencial:



- Não esquecer que a expressão:

$$y_0(t) = ce^{\lambda t}$$

Representa uma exponencial genérica, pelo que o formato de uma resposta a entrada-nula de um sistema de 1ª ordem, não tem de ser necessariamente uma exponencial decrescente.

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de 1ª ordem

Substituindo a solução:

$$y_0(t) = ce^{\lambda t}$$

na equação que permite determinar a resposta a entrada-nula num sistema de 1ª ordem:

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = -a_0 y_0(t)$$

Obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\left(ce^{\lambda t}\right) = -a_0 ce^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow c\lambda e^{\lambda t} = -a_0 ce^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda = -a_0$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de 1ª ordem

Então, a solução de

$$(D + a_0)y_0(t) = 0$$

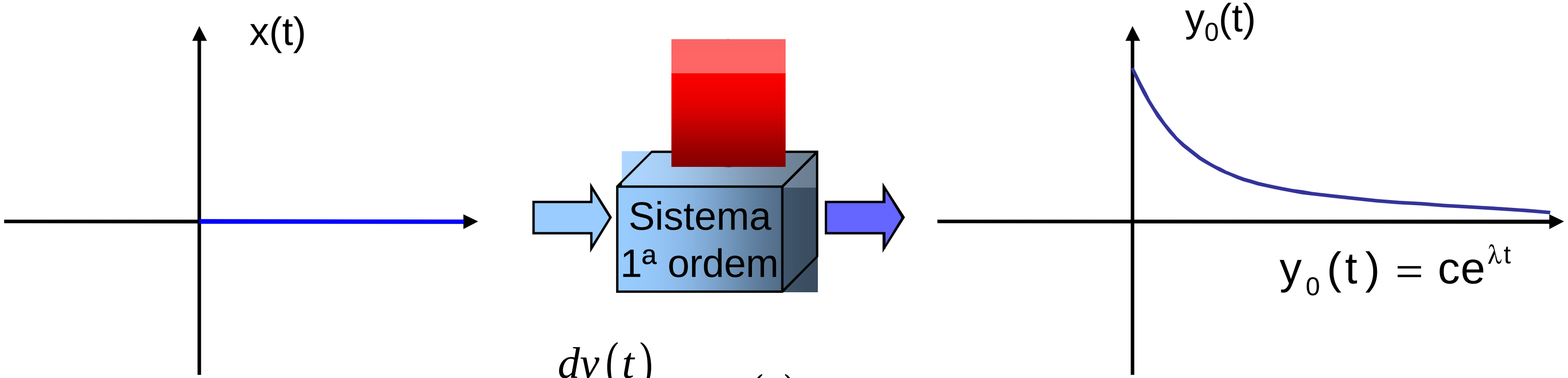
Será da forma $y_0(t) = ce^{\lambda t}$ com $\lambda = -a_0$, ou seja:

$$y_0(t) = ce^{-a_0 t}$$

É de notar que *c* é uma constante arbitrária; a solução na expressão anterior verifica a equação para qualquer valor de c. Consequentemente há uma infinidade de soluções possíveis para a equação.

A solução única pode ser determinada se acrescentarmos uma restrição à solução. Esta restrição é vulgarmente dada na forma de uma condição inicial.

Exemplo para sistema de 1ª ordem



$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5x(t)$$

Recorrendo ao uso do operador D.

$$(D+2)\,y(t) = 5x(t)$$

Como se procura a resposta a entrada-nula, anula-se a entrada x(t)

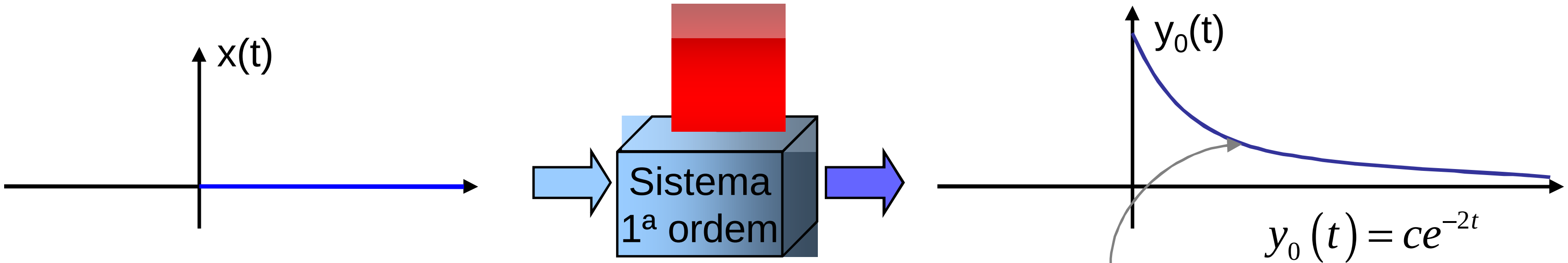
$$(D+2)\,y_0(t) = 0$$

Como já se verificou que um sistema descrito por $(D + a_0)y_0(t) = 0$

$$y_0(t) = ce^{-2t}$$

apresenta uma resposta com a forma: $y_0(t) = ce^{-a_0 t}$

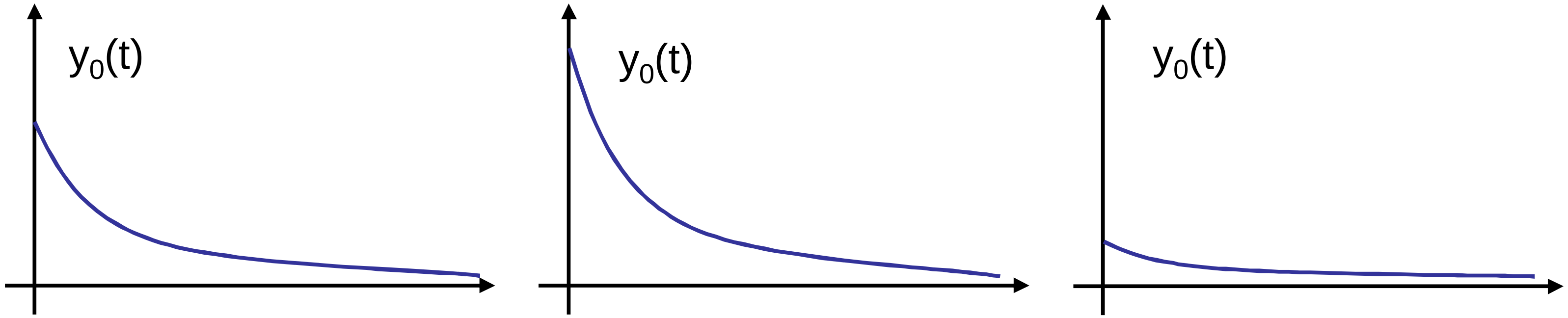
Exemplo para sistema de 1ª ordem



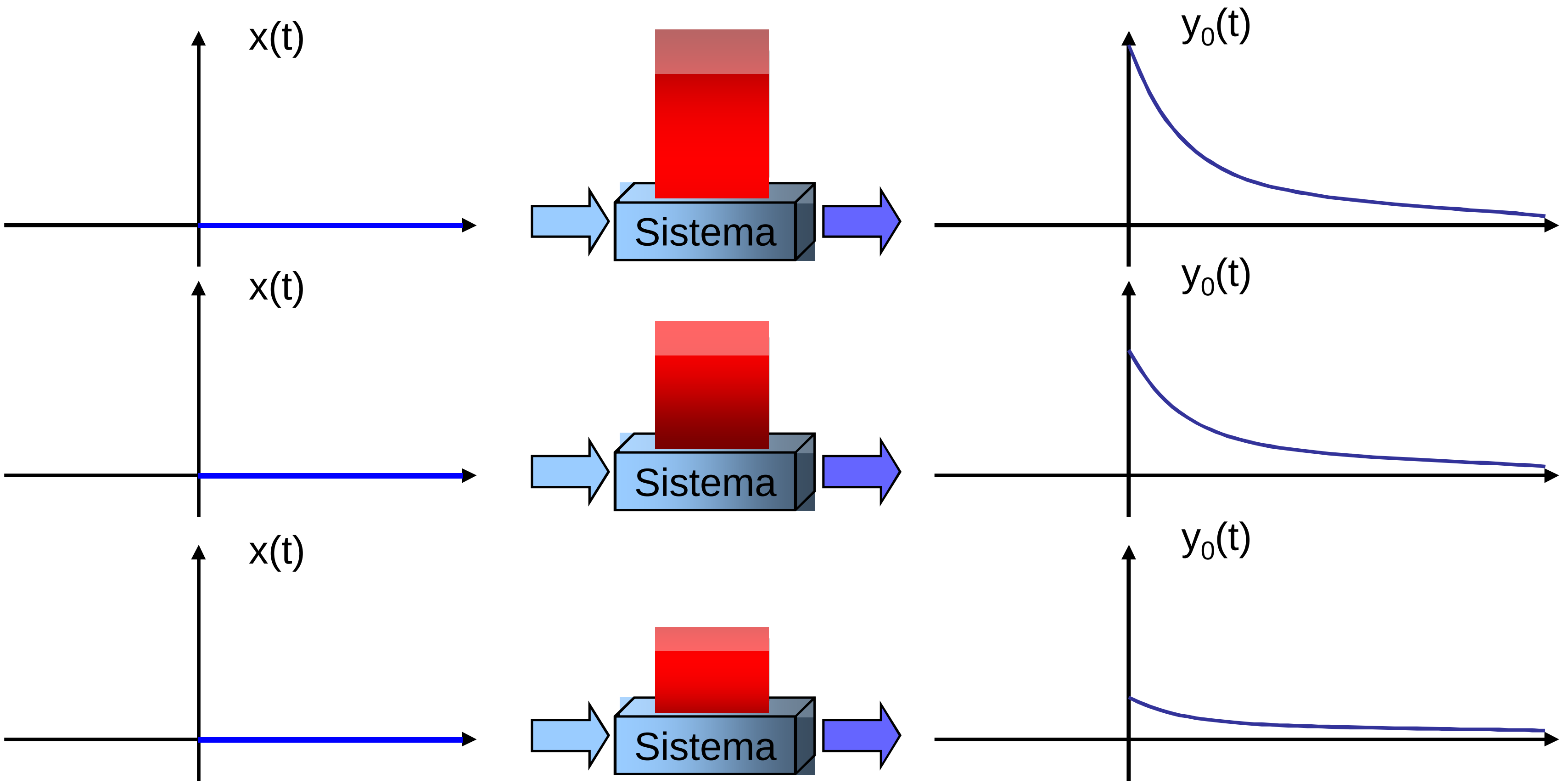
$$y_0(t) = ce^{-2t}$$

Fica assim definida a taxa de queda da exponencial.

- No entanto, nem tudo está definido quanto a esta exponencial. Repare-se que todas as exponenciais seguintes têm o mesmo parâmetro • , no entanto têm início num valor diferente.



Exemplo para sistema de 1ª ordem



- Conclui-se então que a resposta a entrada-nula só poderá ser completamente determinada se fôr conhecida a situação inicial do sistema.

Resposta a entrada-nula de um sistema de 1ª ordem

Recapitulando:

Um sistema de 1ª ordem descrito por uma equação diferencial na forma:

$$(D + a_0)y_0(t) = 0$$

Terá uma resposta a entrada-nula da forma:

$$y_0(t) = ce^{\lambda t}$$

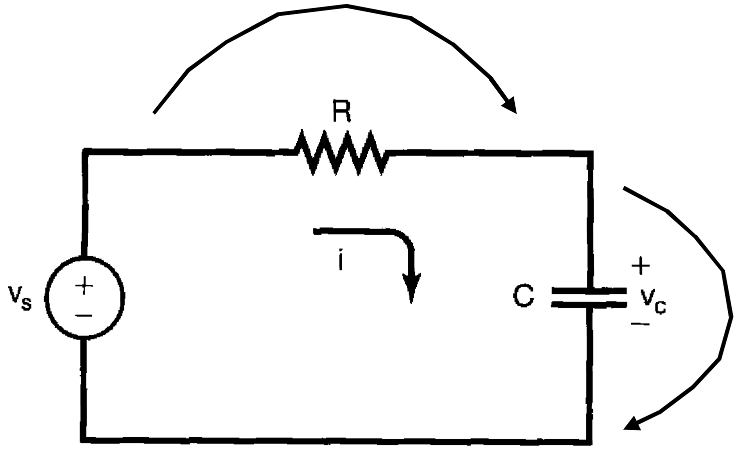
A equação diferencial que descreve o sistema permite que se determine o parâmetro • da resposta a entrada-nula.

$$y_0(t) = ce^{-a_0 t}$$

O parâmetro *c* dependerá das condições iniciais do sistema, ou seja, da energia que ele tem armazenada no início.

Caso particular de 1ª ordem

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} \Leftrightarrow i(t) = \frac{v_s(t) - v_C(t)}{R}$$



$$i(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\frac{v_s(t) - v_C(t)}{R} = C\,\frac{dv_C(t)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

Dado que $V_s = x(t)$ e que $V_c = y(t)$,
a equação tem uma descrição genérica:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

onde a=1/RC e b=1/RC

Logo a resposta a entrada nula será dada por:

$$y_0(t) = ce^{-\frac{1}{RC}t}$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de ordem N

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0)\, x(t)$$

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y_0(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0) \cdot 0$$

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y_0(t) = 0$$

A soma pesada de diversas derivadas da resposta devem anular-se, pelo que a função exponencial preenche os requisitos como resposta: $y_0(t) = ce^{\lambda t}$

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) ce^{\lambda t} = 0$$

$$c\lambda^N e^{\lambda t} + ca_{N-1}\lambda^{N-1}e^{\lambda t} + \ldots + ca_1\lambda e^{\lambda t} + ca_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$c(\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} = 0$$

Para uma solução não trivial (c=0 seria a solução trivial) teremos que ter:

$$\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Este resultado significa que desde que λ verifique a equação anterior $ce^{\lambda t}$ é solução da equação:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y_0(t) = 0$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de ordem N

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1 D + b_0)x(t)$$

O polinómio Q(D) é dado por: $Q(D) = D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1 D + a_0$

Notar que o polinómio:

$$\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

é igual ao polinómio Q(D) da expressão com D substituído por λ.
Ou seja, a equação anterior pode ser escrita na forma:

$$Q(\lambda) = 0$$

Se exprimirmos $Q(\lambda)$ numa forma factorizada, a equação anterior pode ainda ser escrita na forma:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de ordem N

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

Quais as soluções desta equação?

$$(\lambda - \lambda_1) = 0 \vee (\lambda - \lambda_2) = 0 \vee \dots \vee (\lambda - \lambda_N) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 \vee \lambda = \lambda_2 \vee \dots \vee \lambda = \lambda_N$$

Verifica-se claramente que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ são as soluções.
Assim, para um sistema de ordem N, não há apenas uma solução como ocorria para os sistemas de 1ª ordem, mas sim N soluções.

Por cada raiz λ há uma exponencial que verifica a equação, na forma:

$$e^{\lambda_i t}, (i = 1, 2, \dots, N)$$

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de ordem N

Observe que o polinómio $Q(\lambda)$, que é característico do sistema, nada tem a ver com o sinal que se injecta na entrada do sistema. Por esta razão é chamado o polinómio característico do sistema.

A equação

$$Q(\lambda) = 0$$

é chamada equação característica do sistema.

Na equação

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

verifica-se claramente que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ são as raízes da equação característica. Consequentemente são chamadas de raízes características do sistema. As exponenciais $e^{\lambda_i t}, (i = 1, 2, \ldots, N)$ na resposta a entrada-nula são chamadas de modos característicos do sistema.

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de ordem N

$$e^{\lambda_i t}, (i = 1, 2, \ldots, N)$$

Existe um modo característico para cada raiz característica do sistema, e a resposta a entrada-nula é uma combinação linear dos modos característicos do sistema como é visível pela expressão:

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_N e^{\lambda_N t}$$

O atributo mais importante de sistemas LITC (lineares, invariantes no tempo e causais) são os seus modos característicos.

Os modos característicos não só determinam a resposta do sistema a entrada-nula como também desempenham um papel importante na determinação da resposta a estado-nulo.

Resposta a entrada-nula $y_0(t)$
Sistema de ordem N

Conclui-se então que um sistema descrito por uma equação diferencial de ordem *n* dada por:

$$\left(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \ldots + a_1D + a_0\right)y(t) = (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \ldots + b_1D + b_0)x(t)$$

apresenta como resposta a entrada-nula:

$$y_0(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_Ne^{\lambda_N t}$$

Onde as raízes características se retiram da expressão:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

Ficam no entanto por determinar as constantes c_1, c_2, … , c_N.

À semelhança do que acontece para os sistemas de primeira ordem, estas constantes são determinadas utilizando informação sobre o estado inicial do sistema.

Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

Um sistema LITC é especificado pela equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

Determine $y_0(t)$ (resposta do sistema a entrada-nula) para as **condições iniciais**:

.

$$y_0(0) = 3, \quad \frac{dy_0(0)}{dt} = -7$$

Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

O polinómio Q(D) determina-se directamente por inspecção:

$$Q(D) = D^2 + 6D + 8$$

Por substituição, verifica-se imediatamente que o polinómio característico do sistema é

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$$

A sua equação característica será obtida igualando o polinómio anterior a zero, ou seja,

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

Para achar as raízes características (fundamentais na determinação dos modos característicos) terá que se resolver a equação característica atrás obtida.

Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2 \quad \mathrm{V} \quad \lambda = -4$$

As raízes características são portanto –2 e –4. Consequentemente os modos característicos serão

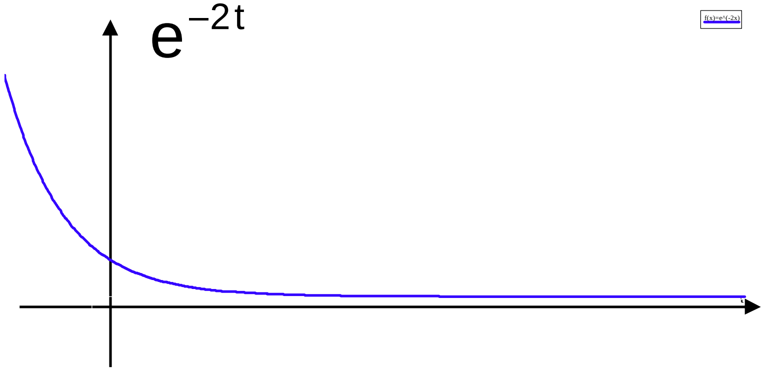
$$e^{-2t} \;\; ; \;\; e^{-4t}$$

A resposta do sistema a entrada-nula será uma **combinação linear** destes dois modos característicos:

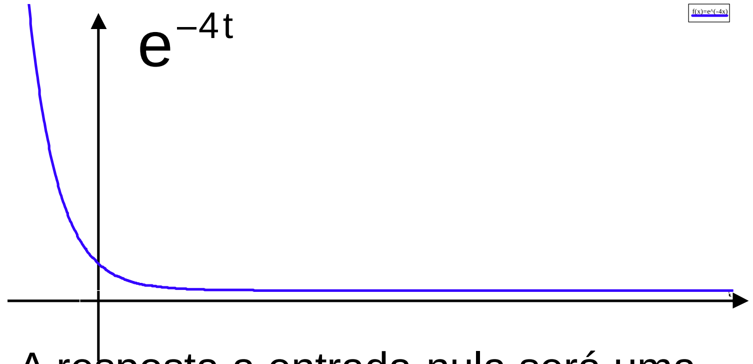
$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

e^{-2t}



e^{-4t}



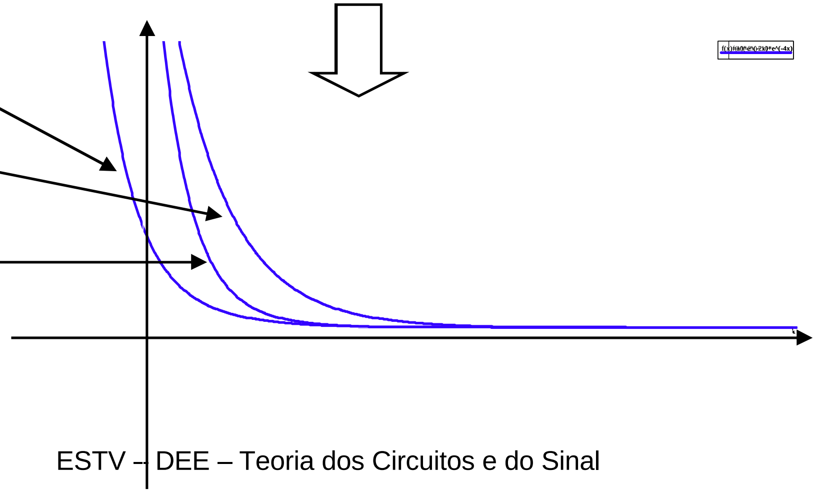
A resposta a entrada-nula será uma combinação linear destes modos

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

$y_0(t) = e^{-2t} + e^{-4t}$?

$y_0(t) = 10e^{-2t} + e^{-4t}$?

$y_0(t) = e^{-2t} + 10e^{-4t}$?



Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

Esta é a forma geral da solução.

Quaisquer que sejam as condições iniciais do sistema esta será a expressão que rege a saída.

No entanto para definirmos a saída exacta nesta situação particular, é necessário determinar o valor de c_1 e de c_2.

Isto é conseguido recorrendo às **condições auxiliares** que nos são dadas.

$$y_0(0) = 3, \quad \frac{dy_0(0)}{dt} = -7$$

Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

Repare-se que as restrições são, neste caso, dadas na forma de condições iniciais para a saída no instante inicial e para a derivada da saída também nesse instante

$$y_0(0) = 3, \quad \frac{dy_0(0)}{dt} = -7$$

É de notar que dado que temos **duas incógnitas c_1 e c_2** na expressão para $y_0(t)$, temos que recorrer a **duas restrições** para conseguir formar um sistema de **duas equações a duas incógnitas** retirando o valor de c_1 e c_2.

Sabe-se já que a resposta a entrada-nula terá a forma:

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

sujeita às restrições:

$$y_0(0) = 3 \qquad \frac{dy_0(0)}{dt} = -7$$

Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

Forma genérica da resposta a entrada-nula (constantes c_1 e c_2 por determinar)

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

Condições impostas à resposta a entrada-nula.

$$y_0(0) = 3 \qquad \frac{dy_0(0)}{dt} = -7$$

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = -2c_1 e^{-2t} + -4c_2 e^{-4t}$$

Substituindo a forma genérica nestas restrições.

$$c_1 e^{-2\bullet 0} + c_2 e^{-4\bullet 0} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{c_1 + c_2 = 3}$$

$$\frac{dy_0(0)}{dt} = (-2)c_1 e^{-2\bullet 0} + (-4)c_2 e^{-4\bullet 0} = -7 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{-2c_1 - 4c_2 = -7}$$

Chega-se a duas equações nas incógnitas c_1 e c_2 (duas equações a duas incógnitas), o que permite determinar o valor destas constantes e assim, a resposta a entrada-nula.

Exemplo: determinação da resposta a entrada-nula de um sistema

Obtém-se então o sistema de duas equações a duas incógnitas (c_1 e c_2):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -2c_1 - 4c_2 = -7 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior obtém-se

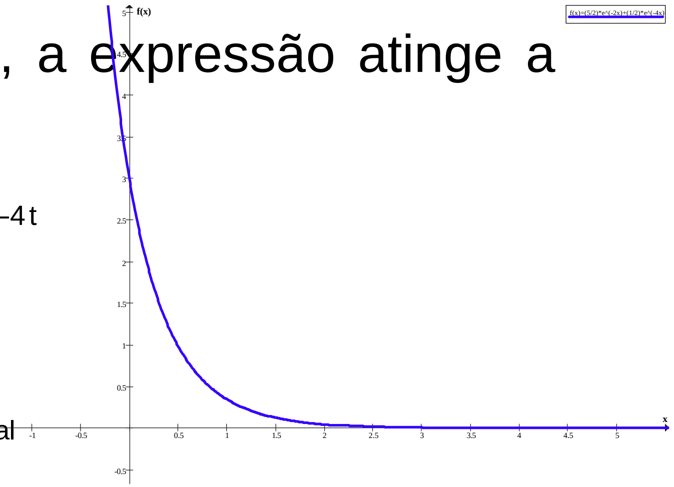
$$c_1 = 5/2, \quad c_2 = 1/2$$

Assim sendo a resposta a entrada-nula está completamente determinada e é dada por:

$$y_0(t) = 5/2\, e^{-2t} + 1/2\, e^{-4t}$$

Como se considera a resposta a partir de t=0, a expressão atinge a forma final:

$$y_0(t) = 5/2\, e^{-2t} + 1/2\, e^{-4t}$$



Raízes múltiplas

Considere-se o caso de ser dado o sistema:

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} - 4\frac{dy_0(t)}{dt} + 4y_0(t) = 0$$

de forma equivalente usando o operador *D*, $\left(D^2 - 4D + 4\right)y_0(t) = 0$

O polinómio característico é dado por

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

sendo a equação característica do sistema:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2 \quad \vee \quad \lambda = 2$$

Ou seja, para um sistema de segunda ordem não se obtiveram duas raízes simples, mas sim uma dupla.

Raízes múltiplas

Seria intuitivo pensar que à semelhança do caso em que as raízes são simples, os modos seriam:

$$\cancel{e^{2t} \quad \overset{=}{;} \quad e^{2t}}$$

O que não está de acordo com o facto de que um sistema de segunda ordem terá necessariamente 2 modos característicos diferentes.

O que se verifica na prática é que os modos característicos associados a uma raíz múltipla assumem uma nova configuração.

Neste caso particular os modos seriam:

$$e^{2t} \quad ; \quad te^{2t}$$

Sendo a resposta a entrada-nula uma combinação linear dos modos característicos, terá a forma:

$$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

Raízes múltiplas

Foi já verificado que para raíz característica •$_i$ existe um modo associado:

$$e^{\lambda_i t}$$

Este modo característico é válido para raízes simples da equação característica.

Se houver repetição de um valor para as raízes, a forma da solução é ligeiramente modificada. É possível demonstrar-se que para a equação diferencial

$$(D-\lambda)^r y_0(t) = 0$$

com uma raiz de multiplicidade *r*, os modos característicos são

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1} e^{\lambda t}$$

sendo a solução da equação dada por uma combinação linear destes modos:

$$y_0(t) = \left(c_1 + c_2 t + \ldots + c_r t^{r-1}\right) e^{\lambda t}$$

Raízes múltiplas

Consequentemente, para um sistema de polinómio característico factorizado

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \ldots (\lambda - \lambda_N)$$

os modos característicos serão

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_{r+1} t}, \ldots, e^{\lambda_N t}$$

e a solução será dada por

$$y_0(t) = \left(c_1 + c_2 t + \ldots + c_r t^{r-1}\right)e^{\lambda_1 t} + c_{r+1}e^{\lambda_{r+1} t} + \ldots + c_N e^{\lambda_N t}$$

Raízes complexas

Considere-se agora o caso de ser dado o sistema

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_0(t)}{dt} + 40 y_0(t) = 0$$

de forma equivalente usando o operador *D*,

O polinómio característico é dado por

$$\lambda^2 + 4\lambda + 40$$

sendo a equação característica do sistema:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 160}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{-144}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm j12}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2 + j6 \quad \vee \quad \lambda = -2 - j6$$

Ou seja, as raízes características do sistema são complexas.

Raízes complexas

$$\lambda = -2 + j6 \quad \vee \quad \lambda = -2 - j6$$

A estas raízes características correspondem necessariamente dois modos característicos:

$$e^{(-2+j6)t} \quad ; \quad e^{(-2-j6)t}$$

A solução do sistema para entrada-nula, pode ser escrita recorrendo à notação complexa, resultando em:

$$y_0(t) = c_1 e^{(-2+j6)t} + c_2 e^{(-2-j6)t}$$

No entanto, esta notação complexa pode ser convertida em notação real arranjando a expressão anterior de forma conveniente:

$$y_0(t) = c_1 e^{(-2+j6)t} + c_2 e^{(-2-j6)t} = e^{-2t}(c_1 e^{j6t} + c_2 e^{-j6t})$$

Para um sistema real, a resposta terá que ser real. Isso apenas é possível se c_1 e c_2 forem conjugados. Sendo c_1 e c_2 expressos da seguinte forma

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

Raízes complexas

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \qquad\qquad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

substituindo-se em $y_0(t) = c_1 e^{(-2+j6)t} + c_2 e^{(-2-j6)t} = e^{-2t}(c_1 e^{j6t} + c_2 e^{-j6t})$

obtém-se $$y_0(t) = e^{-2t}\left(\frac{c}{2} e^{j\theta} e^{j6t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{-j6t}\right) \Leftrightarrow$$

$$y_0(t) = e^{-2t}\,\frac{c}{2}\left(e^{j(\theta+6t)} + e^{-j(\theta+6t)}\right)$$

Utilizando a fórmula de Euler: $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$ obtém-se:

$$y_0(t) = e^{-2t} c\,\frac{1}{2}\left(e^{j(\theta+6t)} + e^{-j(\theta+6t)}\right) =$$

$$y_0(t) = c e^{-2t} \cos(\theta + 6t)$$

Quantas constantes ficam por determinar para se ter a resposta completa?
O que é necessário para determinar essas constantes?

Resposta a entrada-nula para raízes do sistema complexas

As raízes complexas aparecem em pares conjugados.

Assim, tendo $\lambda = \alpha + j\beta$ e $\lambda = \alpha - j\beta$ como raízes do sistema, obtém-se uma resposta a entrada-nula:

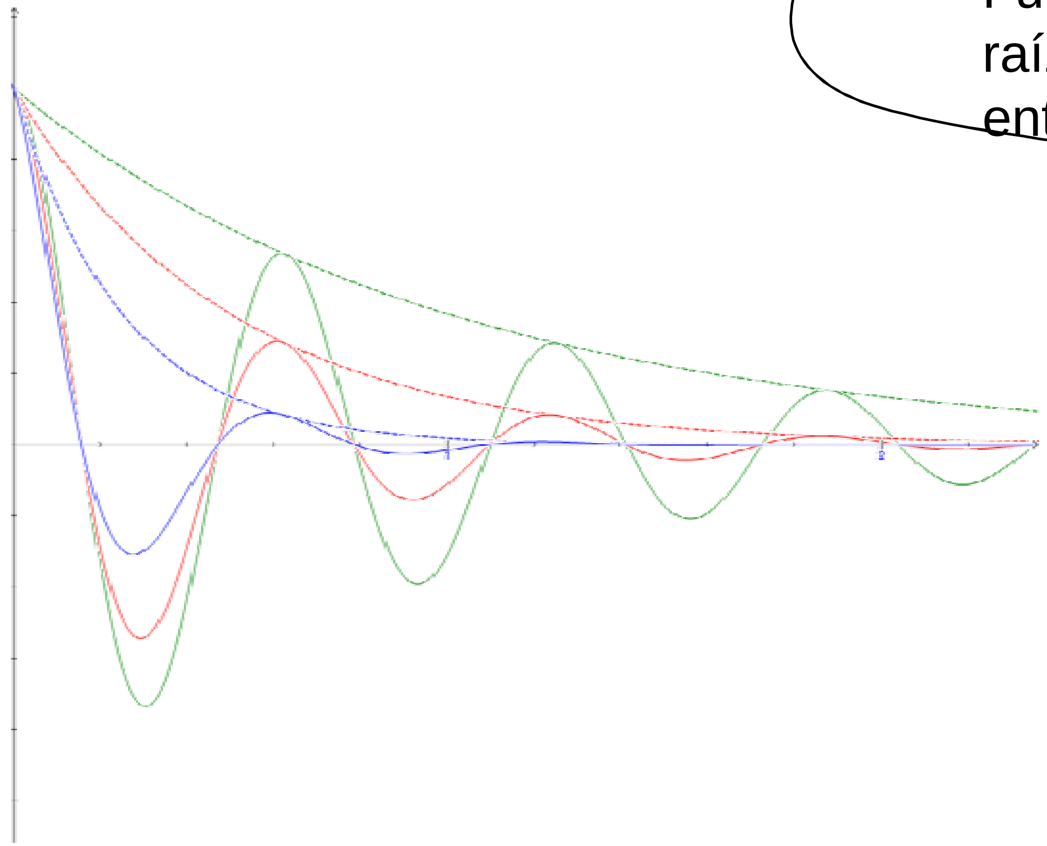
$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= \frac{c}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha - j\beta)t} \\
&= \frac{c}{2} e^{j\theta} e^{\alpha t} e^{j\beta t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{\alpha t} e^{-j\beta t} \\
&= \frac{c}{2} e^{\alpha t} e^{j\beta t} e^{j\theta} + \frac{c}{2} e^{\alpha t} e^{-j\beta t} e^{-j\theta} \\
&= \frac{c}{2} e^{\alpha t} \left[e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)} \right] \\
&= c e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)
\end{aligned}
$$

A parte real das raízes características do sistema, • , controla a exponencial que envolve o coseno. A parte imaginária das raízes, • ,controla a frequência do coseno.

Tendo $\lambda = \alpha + j\beta$ e $\lambda = \alpha - j\beta$ como raízes do sistema, obtém-se uma resposta a entrada-nula:

$$y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

Função da componente real das raízes características na resposta a entrada-nula:



e^{-t}

$e^{-t}\cos(10t)$

e^{-2t}

$e^{-2t}\cos(10t)$

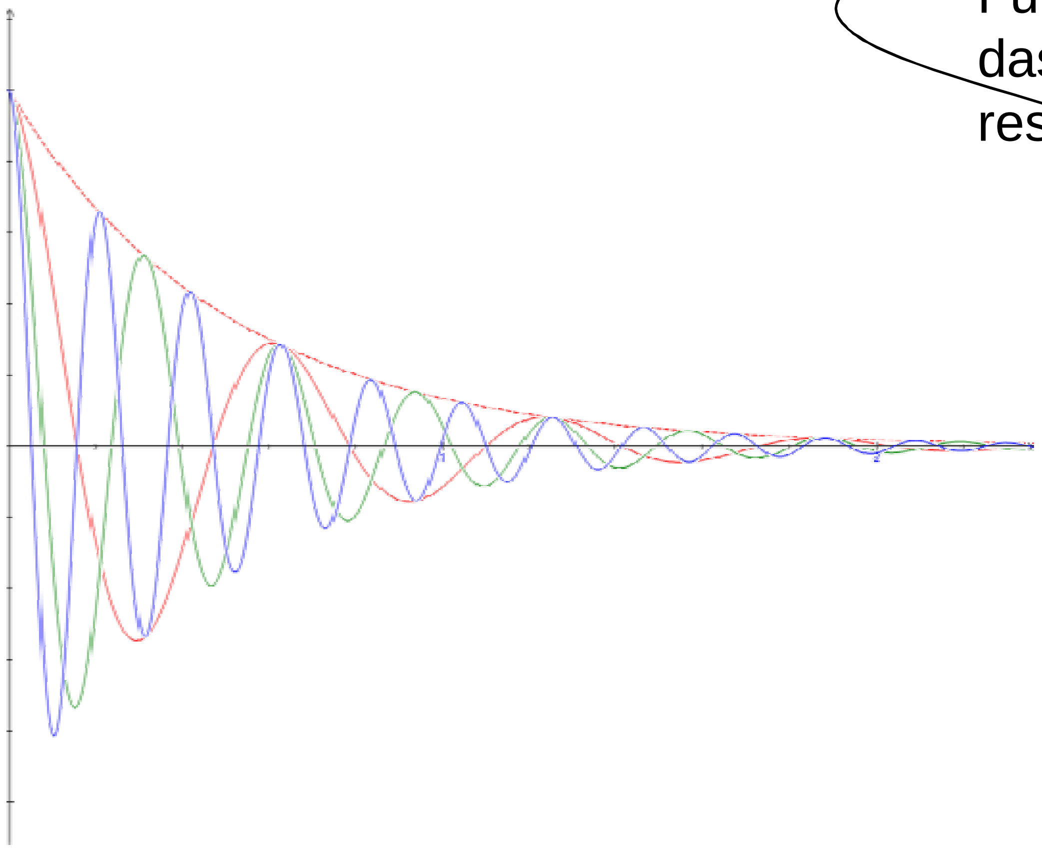
e^{-4t}

$e^{-4t}\cos(10t)$

Tendo $\lambda = \alpha + j\beta$ e $\lambda = \alpha - j\beta$ como raízes do sistema, obtém-se uma resposta a entrada-nula:

$$y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

Função da componente imaginária das raízes características na resposta a entrada-nula:



e^{-2t}

$e^{-2t}\cos(10t)$

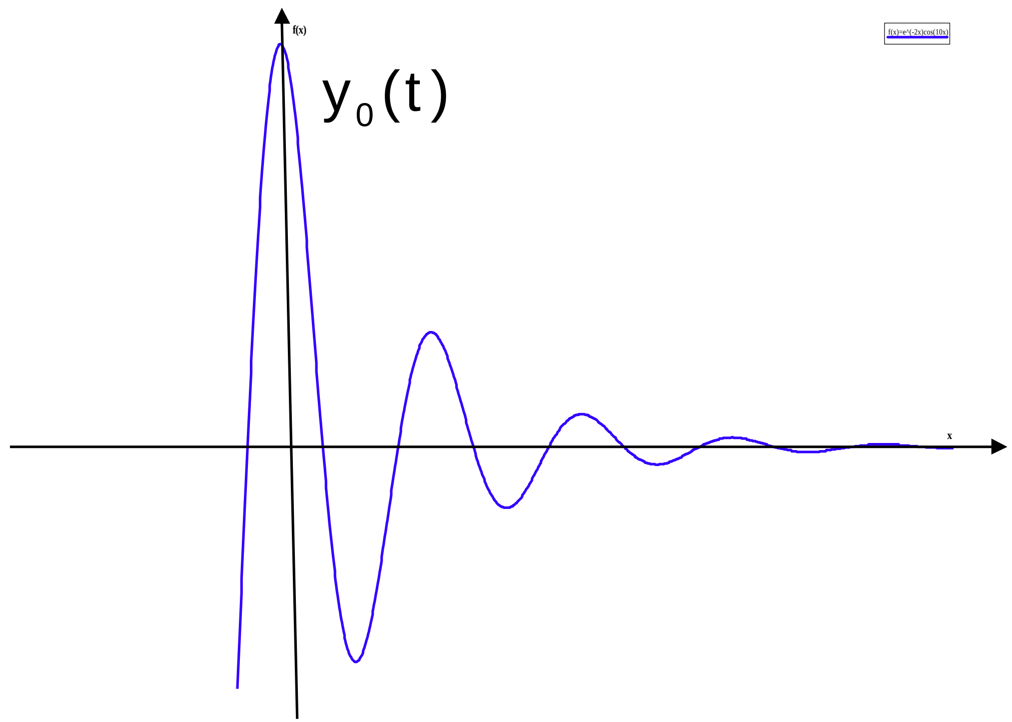
$e^{-2t}\cos(20t)$

$e^{-2t}\cos(30t)$

Raízes complexas

$$y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

$$c = 1$$
$$\alpha = -2$$
$$\beta = 10$$
$$\theta = 0$$

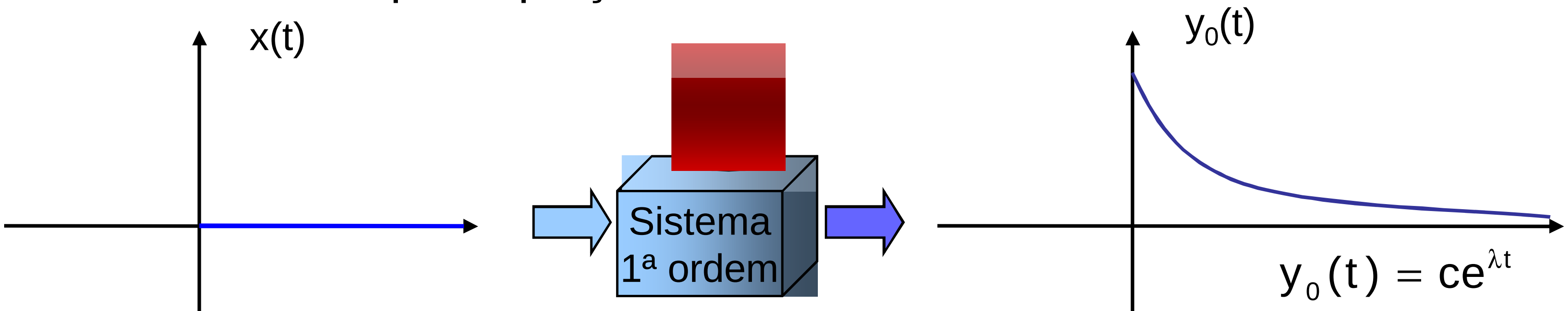


Resposta a entrada-nula de um sistema de ordem N

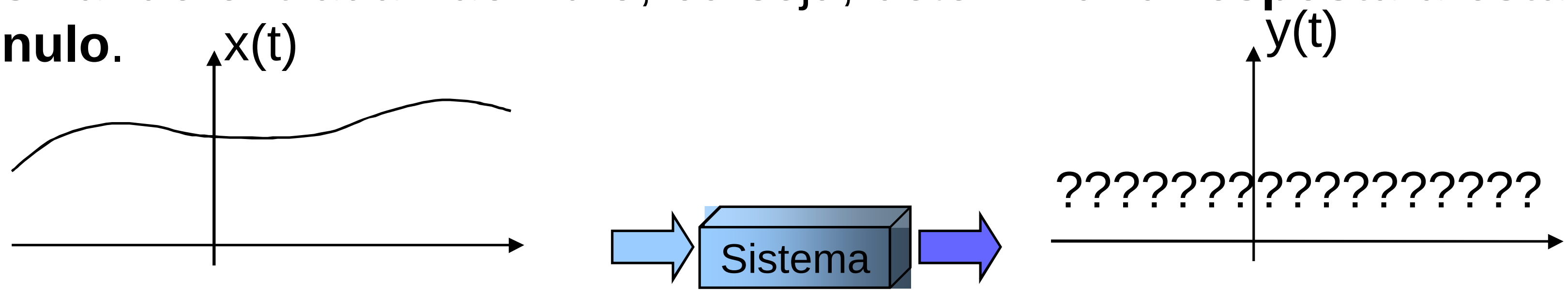
Forma das raízes:	Forma dos modos:
Raízes simples $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$	$e^{\lambda_i t}, (i = 1, 2, \ldots, N)$
Raízes múltiplas (multiplicidade r) $\underbrace{\lambda, \lambda, \ldots, \lambda}_{r \text{ vezes}}$	$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1} e^{\lambda t}$
Raízes complexas conjugadas $\lambda = \alpha + j\beta \quad \lambda = \alpha - j\beta$	$ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$

Resposta a estado-nulo

Determinou-se já a forma de calcular a **resposta a entrada-nula** de um sistema descrito por equações diferenciais.



É agora necessário determinar a **resposta** de um tal sistema **a um sinal de entrada não nulo**, ou seja, determinar a **resposta a estado-nulo**.

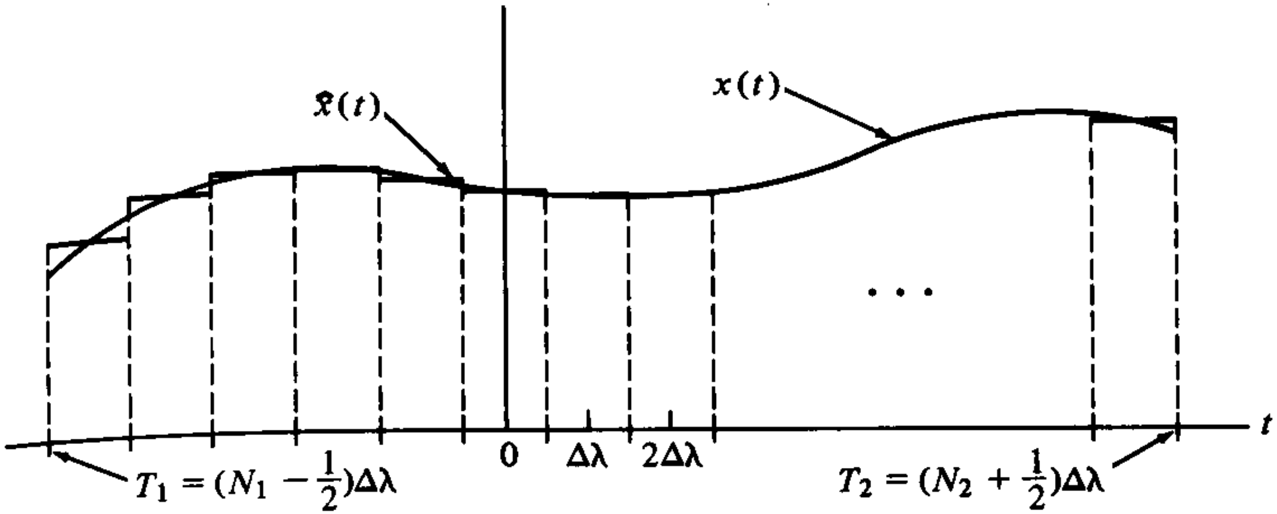


Sendo a variedade de possibilidades para o sinal de entrada infinita, a tarefa de conseguir prever a saída parece impossível.

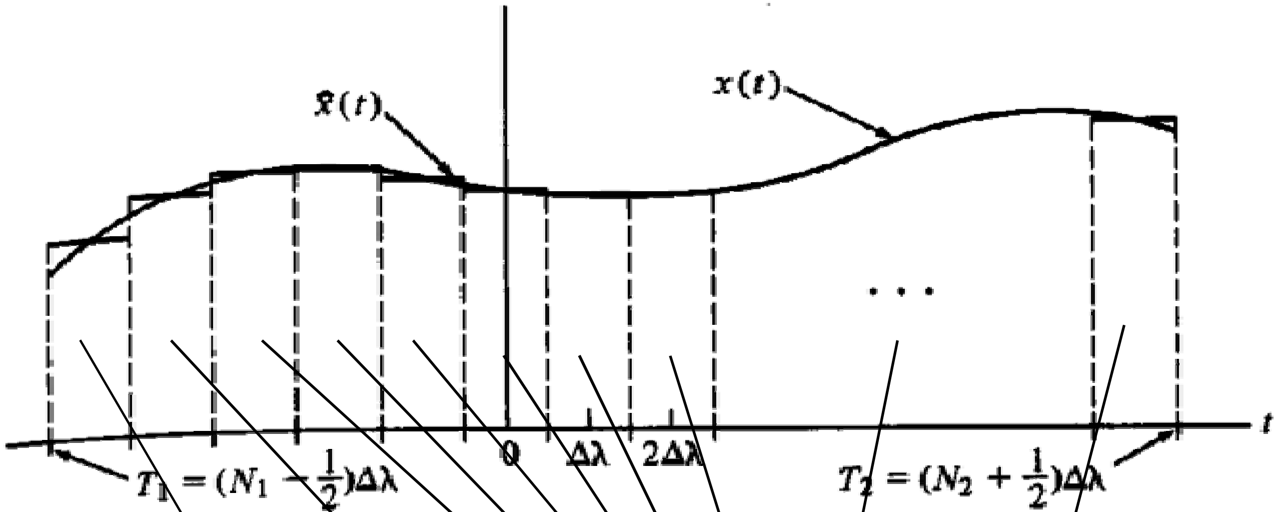
No entanto, a tarefa fica simplificada se interpretarmos o sinal de entrada como sendo uma **combinação de sinais simples**.

Resposta a estado-nulo

O sinal de entrada *x(t)* pode então (por aproximação) ser decomposto na soma de vários sinais mais simples:



Neste caso *x(t)* é expresso como a soma de vários pulsos deslocados no tempo.



Expressando analiticamente o sinal de entrada x(t) como uma soma de funções mais simples:

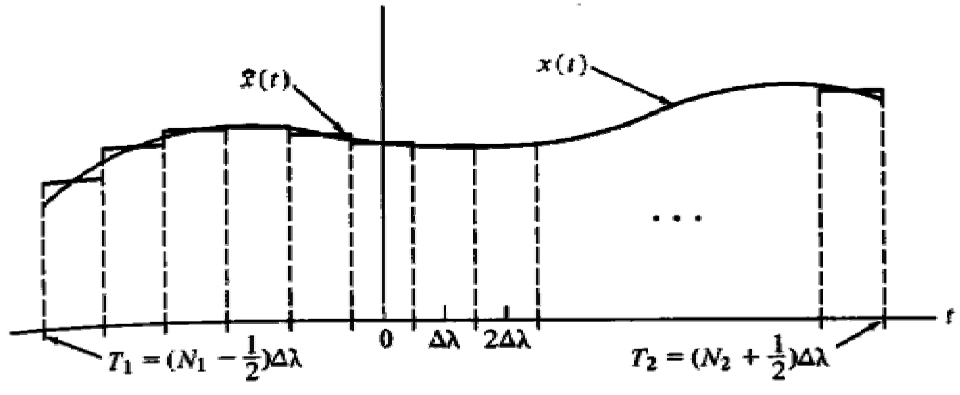
$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots + a_m x_m(t)$$

dado estarmos a tratar de sistemas lineares, a resposta y(t), assume a forma:

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots + a_m y_m(t)$$

onde $y_r(t)$ é a resposta a estado-nulo a uma entrada $x_r(t)$.

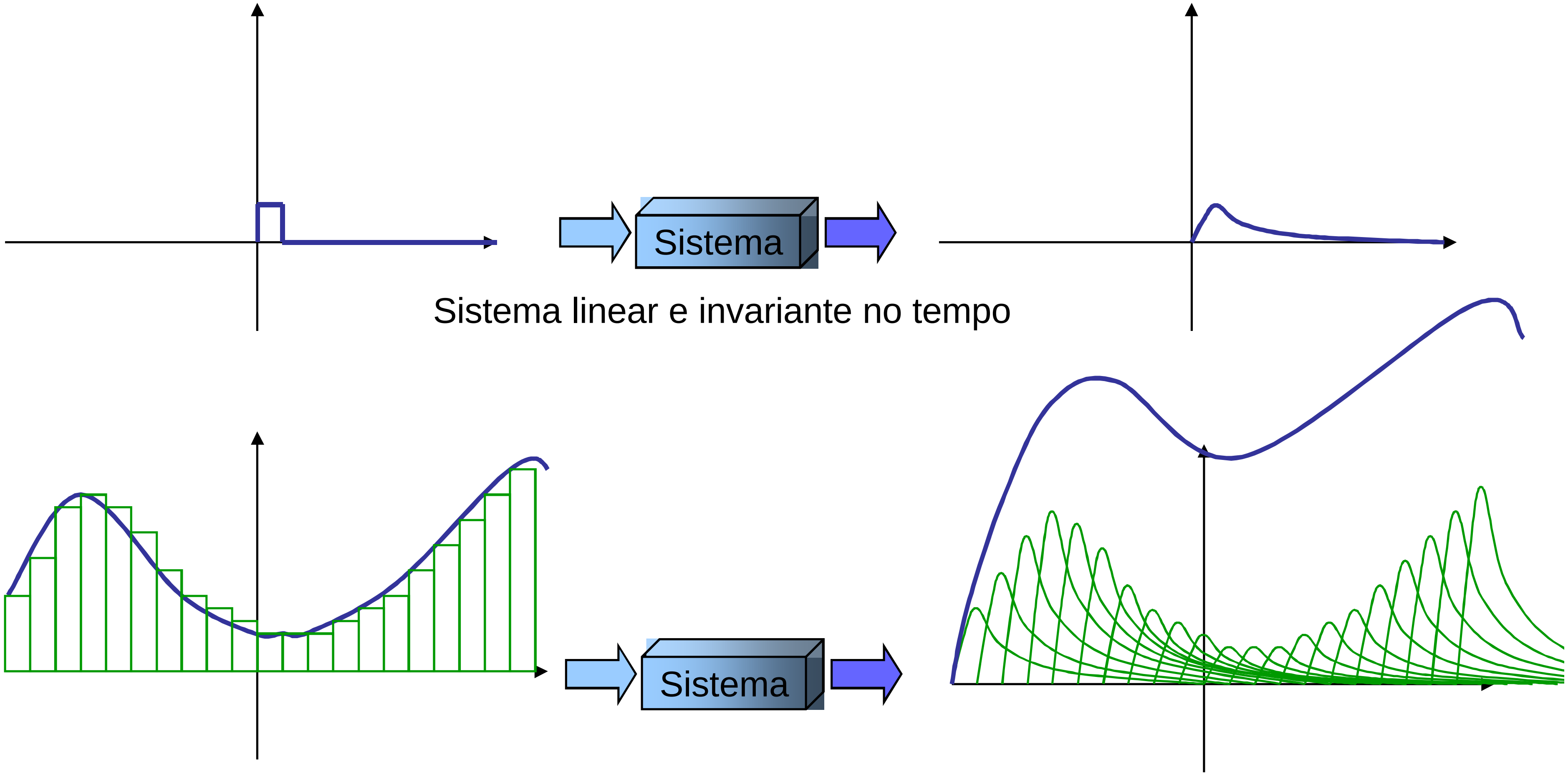
Resposta a estado-nulo



Podemos aproximar *x(t)* por uma soma de pulsos rectangulares de largura $\Delta\lambda$ e de valor (altura) variável. A aproximação melhora à medida que $\Delta\lambda$ à 0.

Nesta situação um sinal de entrada arbitrário pode ser substituído por uma soma pesada (combinação linear) de pulsos. Assim, se conhecermos a resposta do sistema a um pulso, podemos imediatamente determinar a resposta do sistema a uma entrada arbitrária *x(t)* adicionando a resposta do sistema a cada pulso em que se pode decompor x(t). Isto é possível por estarmos a tratar de sistemas lineares.

Decomposição da entrada



$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots + a_m x_m(t)$$

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots + a_m y_m(t)$$

Resposta a estado-nulo

Por decomposição da entrada em sinais mais simples, é possível determinar a resposta a um sinal qualquer.

A única condição necessária, é **ser já conhecida a resposta do sistema a esse sinal mais simples**.

A decomposição do sinal de entrada ocorre na forma:

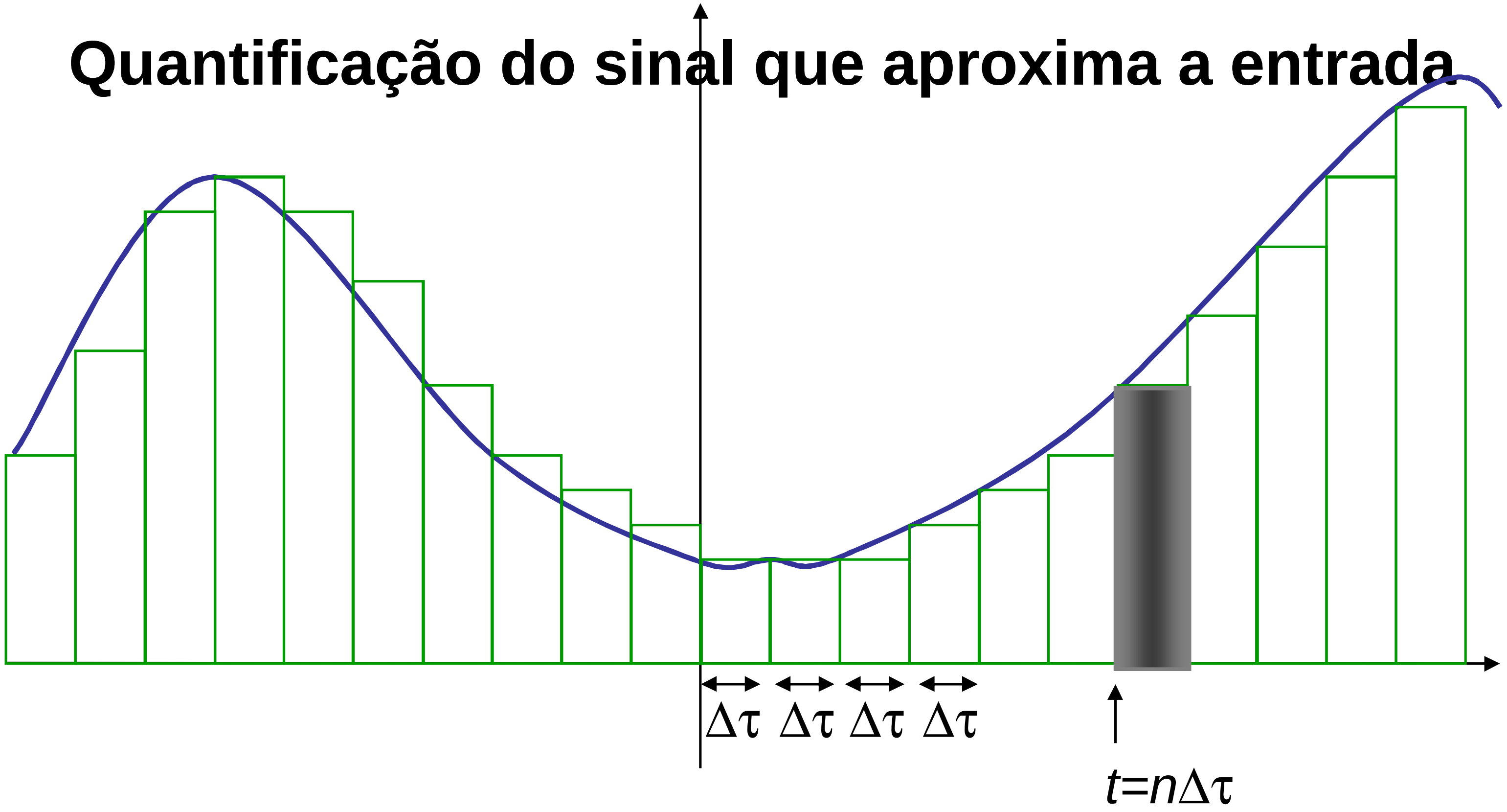
$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots + a_m x_m(t)$$

E a resposta do sistema na forma:

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots + a_m y_m(t)$$

Esta forma de análise só foi possível devido às **propriedades da invariância temporal e da linearidade dos sistemas**.

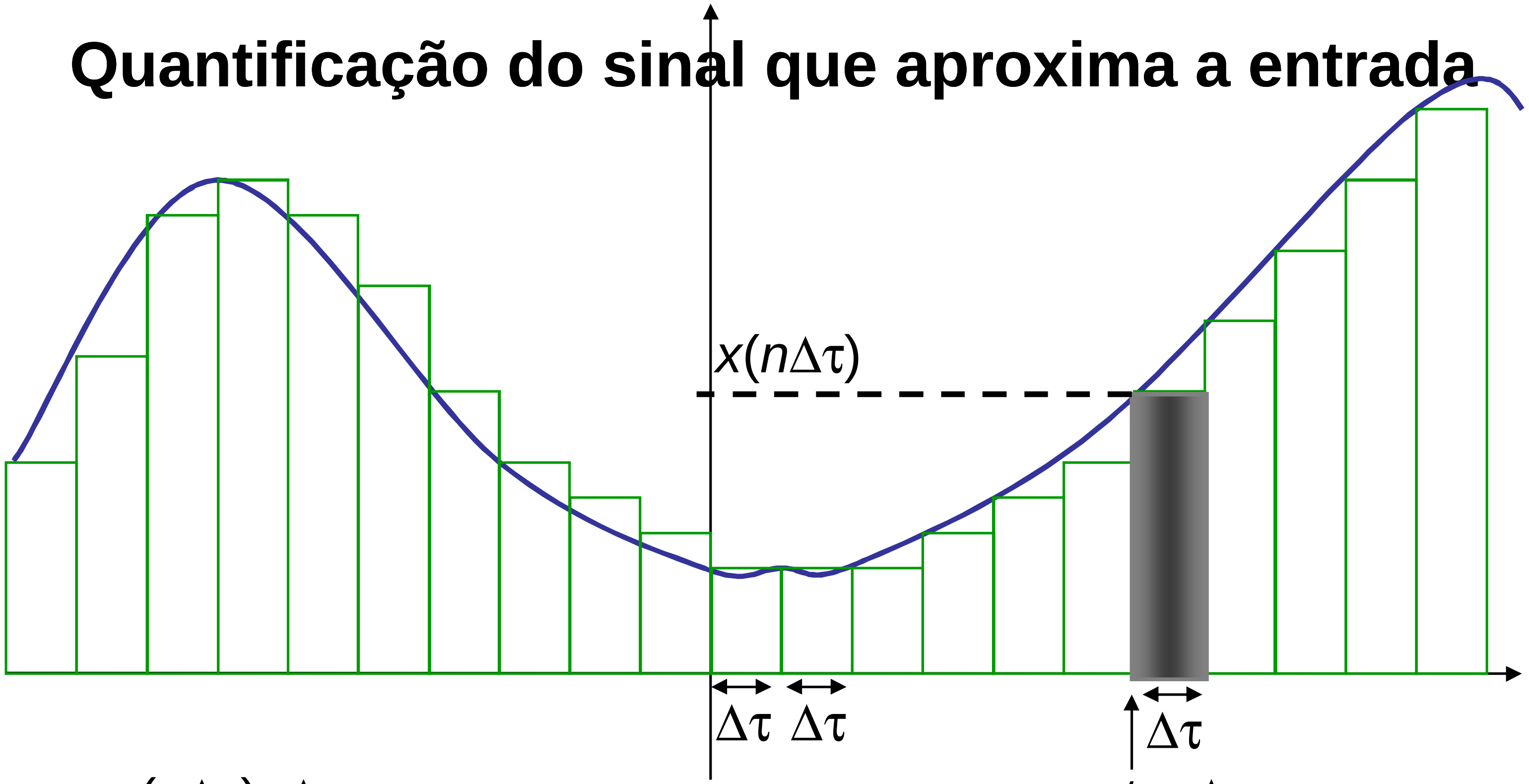
Quantificação do sinal que aproxima a entrada



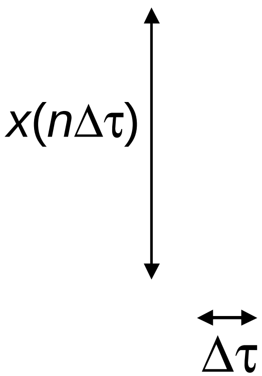
A largura dos pulsos que aproximam o sinal x(t) é $\Delta\tau$.

À medida que $\Delta\tau$ à 0, o pulso rectangular sombreado localizado em $t=n\Delta\tau$ na figura, aproxima um impulso no mesmo instante de intensidade $x(n\Delta\tau)\Delta\tau$ (a área sombreada debaixo do pulso rectangular).

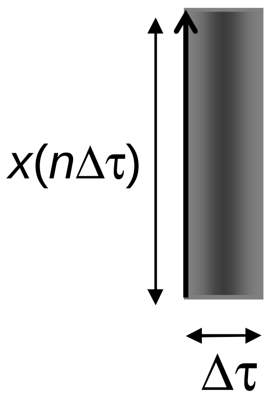
Quantificação do sinal que aproxima a entrada



$A_{pulso} = x(n\Delta\tau).\ \Delta\tau$



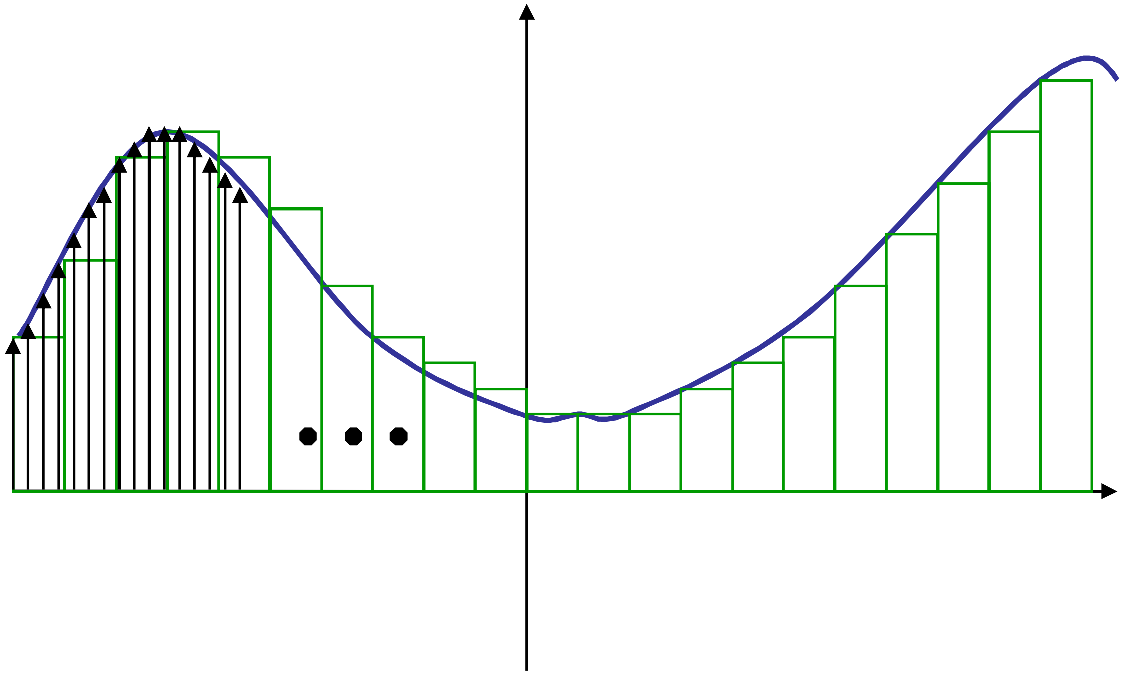
Fazendo Δτ à 0



Este impulso continua a ter área $x(n\Delta\tau).\Delta\tau$, no entanto é agora um impulso localizado em $t=n\Delta\tau$:

*x(n*Dt*)*Dt.d*(t- n*Dt*)*

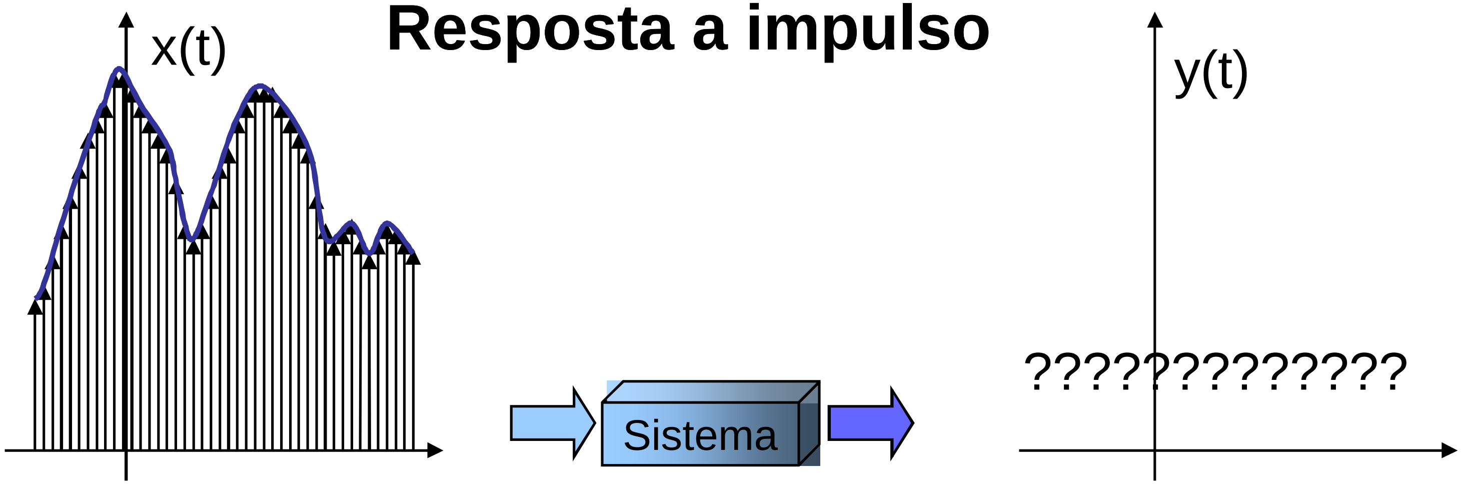
Resposta a estado-nulo



Os pulsos transformam-se no limite, à medida que a sua largura se aproxima de zero, em impulsos.

Um sinal qualquer pode então ser interpretado como uma soma infinita de impulsos **infinitesimalmente próximos**.

Resposta a impulso

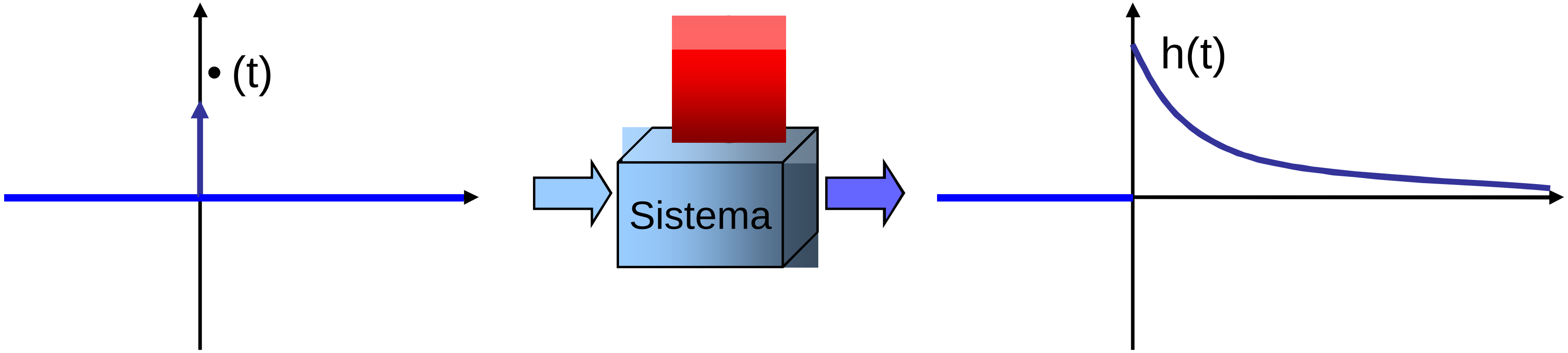


Assim sendo, a resposta do sistema a um sinal de entrada é a soma da sua resposta às várias componentes de impulsos que compõe esse sinal de entrada.

Mostra-se desta forma que conhecendo a resposta de um sistema a um impulso, podemos determinar a saída para um sinal de entrada genérico *x(t)*.

A resposta a impulso de um sistema LITC é vulgarmente designada por *h(t)*.

Resposta a Impulso



A resposta a impulso *h(t)* é a resposta do sistema a um impulso de entrada aplicado em $t=0$ com todas as condições iniciais nulas em $t=0^-$.

Uma entrada impulsiva aparece momentaneamente em $t=0$ e depois desaparece, o que gera **armazenamento de energia** no sistema e cria **condições iniciais não nulas** no sistema **instantaneamente** para $t=0^+$.

Apesar de o impulso desaparecer para $t>0$, o sistema tem ainda uma resposta gerada pelas condições iniciais criadas pelo impulso.

A resposta a impulso *h(t)* deve portanto consistir nos modos característicos do sistema para $t^{3}0^+$. Como resultado

$$h(t) = \text{termos com modos característicos, } t^{3}0^+$$

Resposta a Impulso

$$h(t) = \text{termos com modos característicos}, \; t \geq 0^+$$

Esta resposta é válida para *t>0.* Mas o que acontece para t=0?

Num dado instante t=0, pode no máximo ocorrer um impulso, assim a forma da resposta completa *h(t)* é dada por

$$h(t) = A\delta(t) + \text{ termos c/ modos característicos}, \; t \geq 0$$

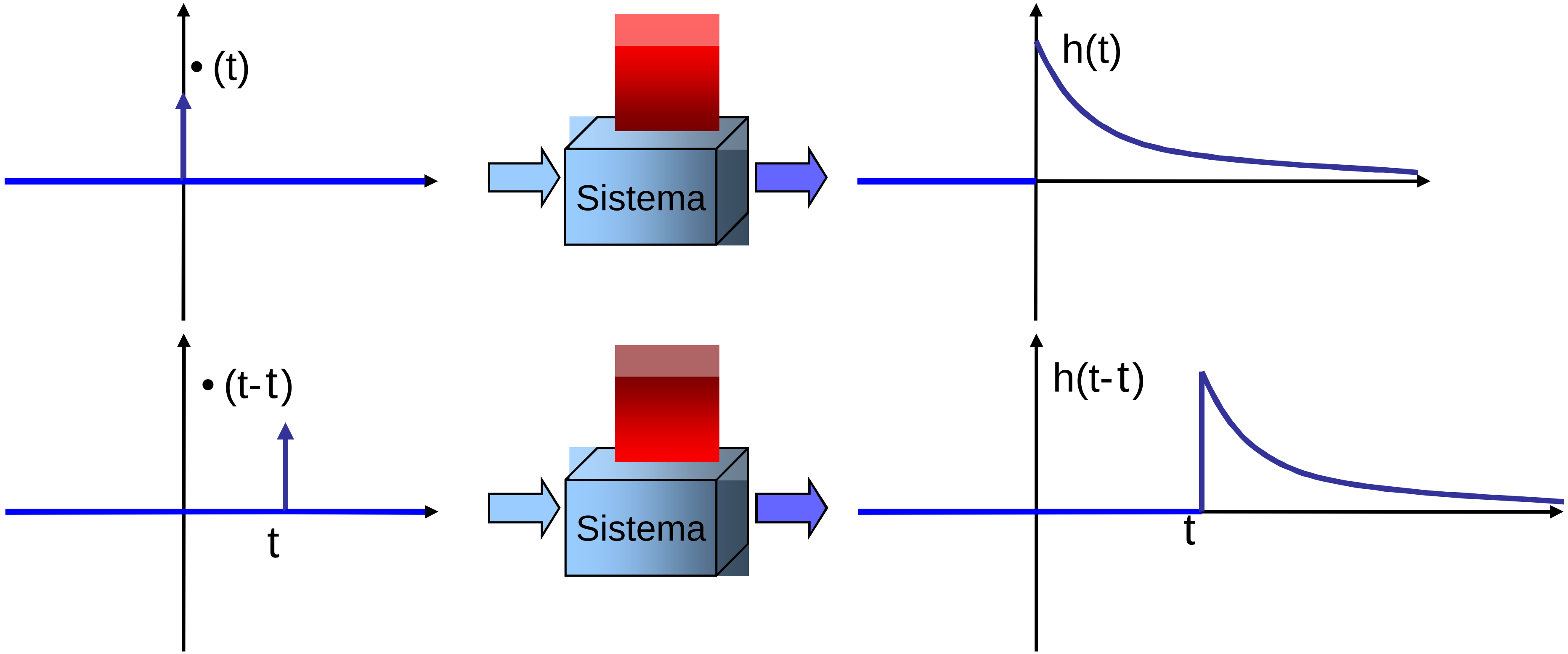
A expressão geral para a resposta a impulso é dada por:

$$h(t) = b_n\delta(t) + [P(D)y_{0h}(t)]u(t)$$

onde b_n é o coeficiente do termo de ordem N em *P(D)*, e $y_{0h}(t)$ é a resposta a entrada nula do sistema sujeito às seguintes condições iniciais: $y_{0h}^{n-1}(0) = 1, \qquad y_{0h}^{n-2}(0) = y_{0h}^{n-3}(0) = \ldots = y_{0h}^{1}(0) = y_{0h}(0) = 0$

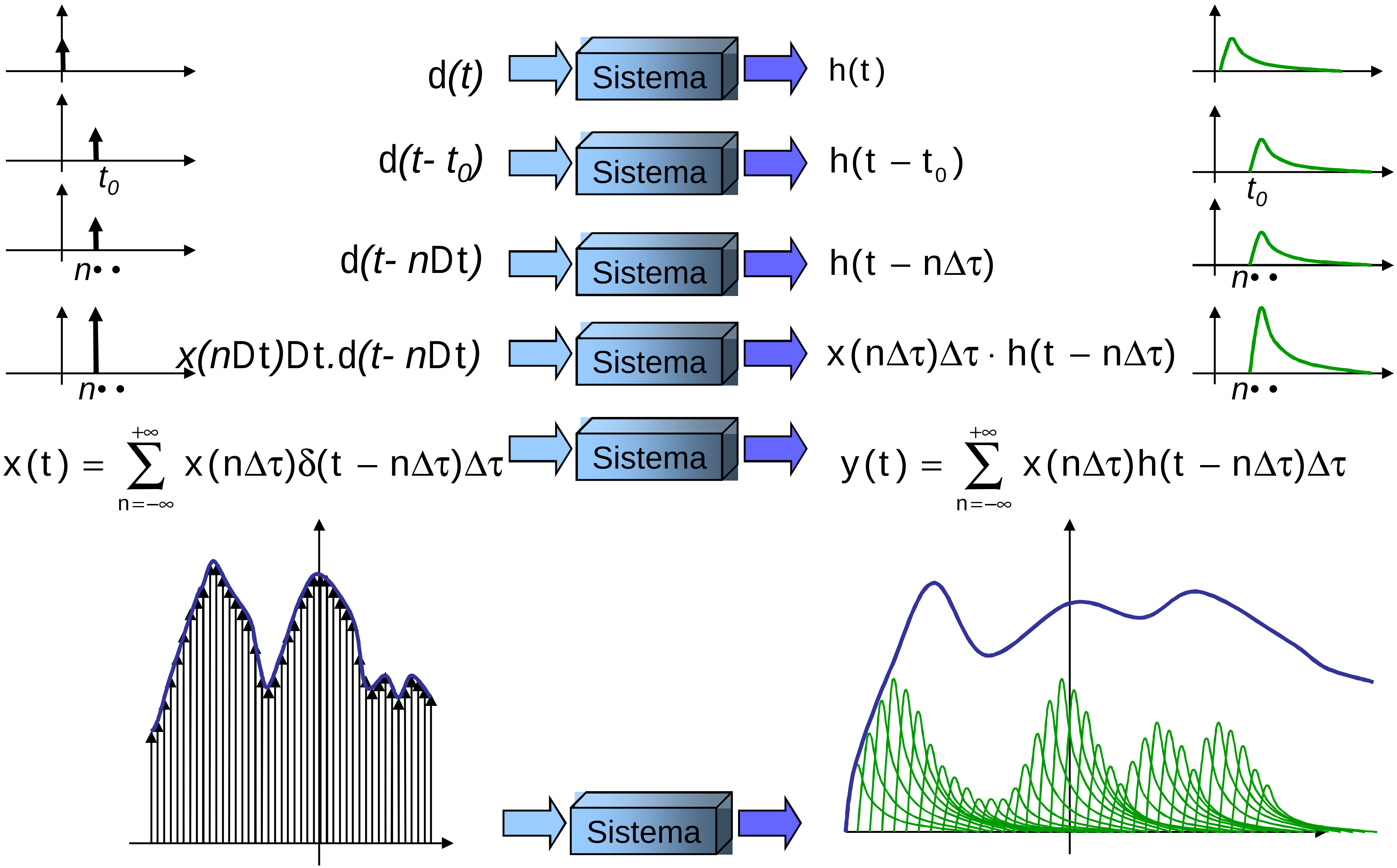
Onde $y_{0h}^{k}(0)$ é o valor da derivada de ordem *k* de $y_0(t)$ em *t=0*.

Resposta a Impulso deslocado no tempo



Se *h(t)* é a resposta de um sistema LITC à entrada d*(t)*, então caso seja aplicada a entrada d*(t*-t*)*, a saída do mesmo sistema será *h(t*-t*)*. Isso é devido à propriedade de invariância temporal dos sistemas LITC.

Resposta a estado-nulo



Resposta a estado-nulo

Para se aproximar o sinal de entrada tanto quanto possível, deverá fazer-se $\Delta\tau \to 0$.

Isto implica que:

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

se transforma em:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Em termos de saída:

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

Transforma-se em:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$

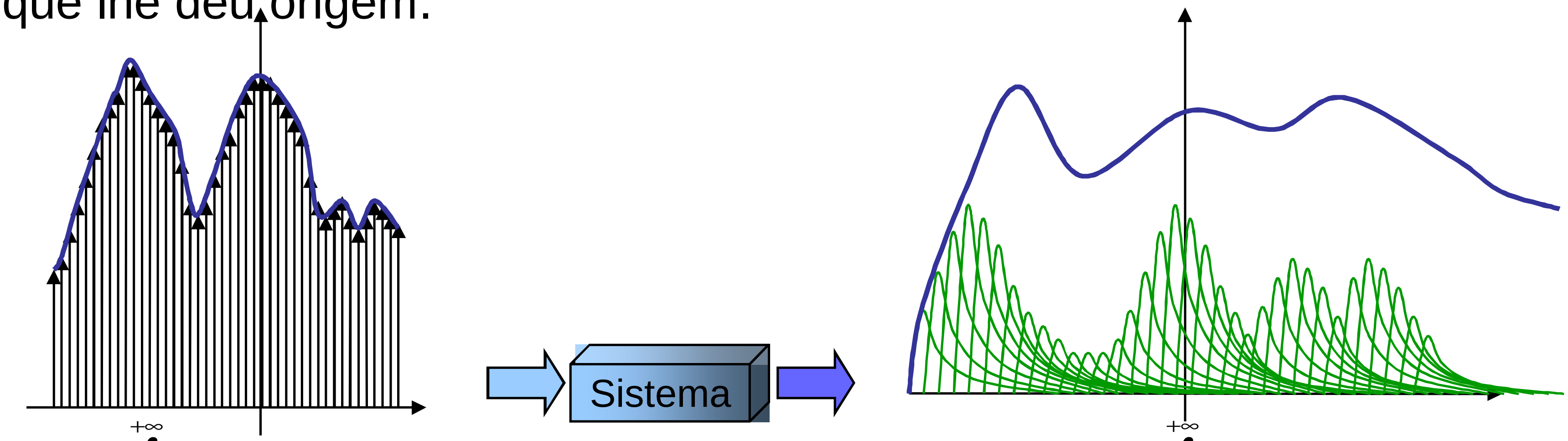
Resposta a estado-nulo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Note-se que a entrada é interpretada como sendo uma soma infinita de impulsos, cada um com a amplitude (área) do sinal de entrada no mesmo instante.

Dada a linearidade e a invariância temporal dos sistemas em estudo, a saída será então uma soma infinita de respostas a impulso localizadas em cada instante e com o mesmo peso $x(\tau)$ do impulso que lhe deu origem.



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Dada a sua importância em diversas áreas da engenharia, o integral anterior recebe um nome particular: **integral de convolução**.

A convolução de duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ é definido da seguinte forma:

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

Propriedades do integral de convolução

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Propriedade comutativa: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

Propriedade distributiva: $f_1(t) * \left[f_2(t) + f_3(t)\right] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

Propriedade associativa: $f_1(t) * \left[f_2(t) * f_3(t)\right] = \left[f_1(t) * f_2(t)\right] * f_3(t)$

Propriedade do deslocamento temporal: $\left| \begin{array}{c} f_1(t) * f_2(t) = c(t) \\ f_1(t) * f_2(t-T) = c(t-T) \\ f_1(t-T) * f_2(t) = c(t-T) \end{array} \right.$

Convolução com um impulso: $f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$

Propriedade da duração: Se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ têm a duração de T_1 e T_2 então a duração de $f_1(t)*f_2(t)$ será de T_1+T_2.

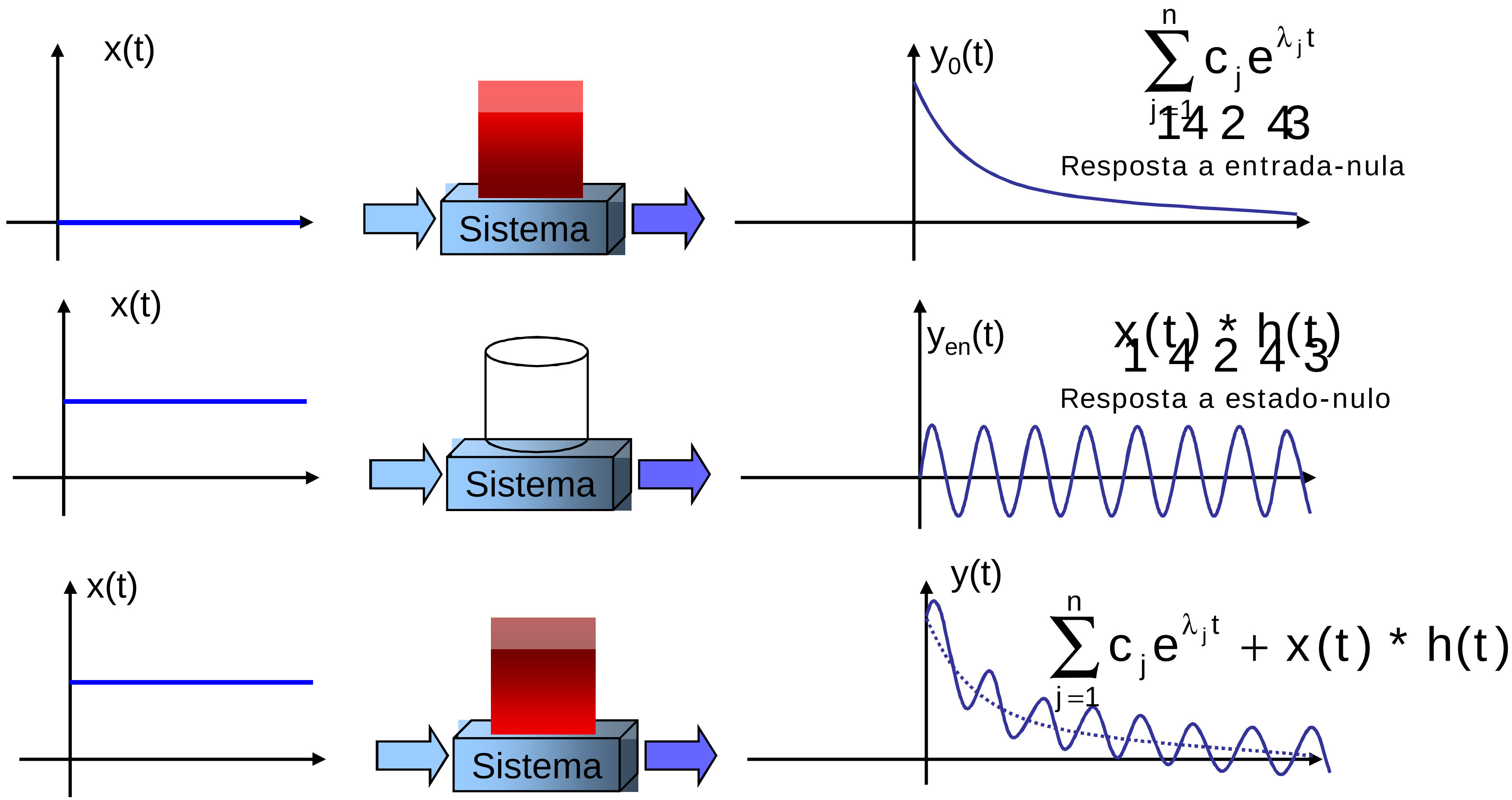
Tabelas de convolução

A tarefa de convolução é consideravelmente simplificada pelo uso de uma tabela de convolução.

Esta tabela, que lista vários pares de sinais $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e o resultado da sua convolução $f_1(t)*f_2(t)$, pode ser usado para determinar $y(t)$, a resposta do sistema a uma entrada $x(t)$, sem realizar a tarefa árdua de integração.

No	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
1	$f(t)$	$\delta(t-T)$	$f(t-T)$
2	$e^{\lambda t}u(t)$	$u(t)$	$\frac{-1}{\lambda}(1-e^{\lambda t})u(t)$
3	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
4	$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}]u(t) \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$
5	$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$
6	$te^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$
7	$t^n u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{n!}{\lambda^{n+1}}e^{\lambda t}u(t) - \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{\lambda^{j+1}(n-j)!}t^{n-j}u(t)$
8	$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
9	$te^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}[e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}+(\lambda_1-\lambda_2)te^{\lambda_1 t}]u(t)$
10	$t^m e^{\lambda t}u(t)$	$t^n e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{m!\,n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{\lambda t}u(t)$
11	$t^m e^{\lambda_1 t}u(t)$	$t^n e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j m!(n+j)!}{j!(m-j)!(\lambda_1-\lambda_2)^{n+j+1}}t^{m-j}e^{\lambda_1 t}u(t)$
	$\lambda_1 \neq \lambda_2$		$+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!(m+k)!}{k!(n-k)!(\lambda_2-\lambda_1)^{m+k+1}}t^{n-k}e^{\lambda_2 t}u(t)$
12	$e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t}-e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta-\phi)}{\sqrt{(\alpha+\lambda)^2+\beta^2}}u(t)$
			$\phi = \tan^{-1}[-\beta/(\alpha+\lambda)]$
13	$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}[e^{\lambda_1 t}u(t)+e^{\lambda_2 t}u(-t)] \quad \text{Re}\,\lambda_2 > \text{Re}\,\lambda_1$
14	$e^{\lambda_1 t}u(-t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})u(-t)$

Resposta total de um sistema – intuitiva e analítica



$$\text{Resposta\_total} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}}_{\text{Resposta a entrada-nula}} + \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{Resposta a estado-nulo}}$$

Resposta total de um sistema

A resposta total de um sistema linear pode ser expressa como a soma da sua resposta a entrada-nula com a resposta a estado-nulo:

$$\text{Resposta\_total} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}}_{\text{Resposta a entrada-nula}} + \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{Resposta a estado-nulo}}$$

Determinação da resposta total de um sistema a uma entrada:

- Da equação diferencial do sistema determinam-se as raízes características e de forma imediata os modos característicos;
- Pela combinação linear destes modos determina-se a expressão genérica da **resposta a entrada-nula**.
- Os coeficientes c_1, $c_2,...,c_n$ nesta resposta são determinados recorrendo a n condições auxiliares;
- Pela equação do sistema é possível determinar *h(t)*, a resposta a impulso do sistema.
- Conhecendo a resposta a impulso *h(t)* e a entrada do sistema *x(t)*, determina-se a **resposta a estado-nulo** convolvendo *x(t)* com *h(t).*

Estabilidade de um sistema

Se um sistema LITC tem *n* raízes características distintas λ_1, λ_2,..., λ_n, a resposta a entrada-nula é dada por:

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}$$

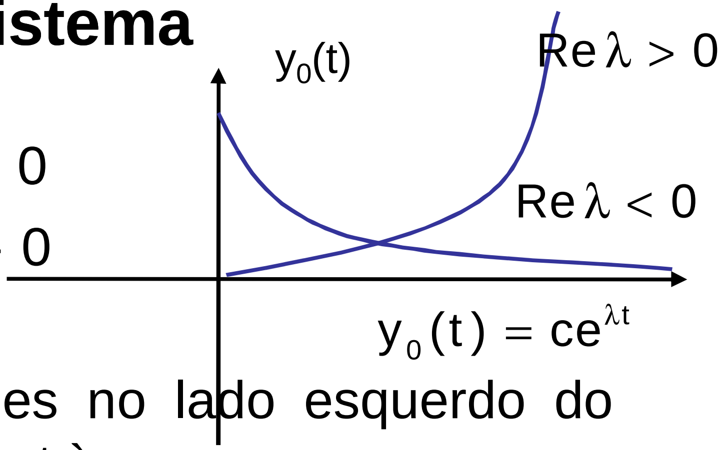
Pelo conhecimento prévio de exponenciais:

$$\lim_{t \to \infty} e^{\lambda t} = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \\ \infty & \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \end{cases}$$

Esboçando a localização das raízes num plano complexo, se uma raiz característica λ se localiza na metade esquerda do plano, a sua parte real é negativa (Re λ<0). Da mesma forma, se uma raiz λ se localiza na metade direita do plano complexo, a sua parte real é positiva (Re λ>0). Ao longo do eixo imaginário, a parte real é nula (Re λ=0).

Estabilidade de um sistema

$$\lim_{t \to \infty} e^{\lambda t} = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \\ \infty & \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \end{cases}$$



Os modos característicos relativos a raízes no lado esquerdo do plano complexo desaparecem à medida que t à $\propto$

Os modos relativos a raízes localizadas no lado direito do plano crescem sem limite à medida que t à $\propto$.

Os modos correspondentes a raízes localizadas no eixo imaginário são da forma $e^{j\beta t} = \cos(\beta t) + j\sin(\beta t)$ e são limitados (nem desaparecem nem crescem sem limite) à medida que t à $\propto$.

Estabilidade de um sistema: raízes múltiplas

Os modos relativos a uma raiz λ repetida *r* vezes são

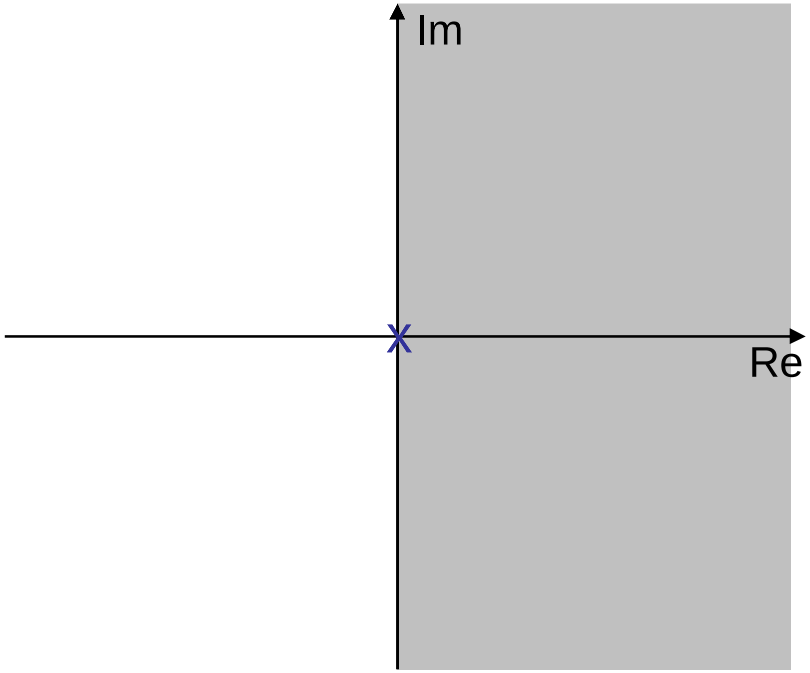
$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1} e^{\lambda t}$$

À medida que t à • , $t^k e^{\lambda t}$ à 0, se Re λ <0 (λ na metade esquerda do plano complexo). Assim sendo, raízes múltiplas na metade esquerda do plano não causam instabilidade.

Quando as raízes múltiplas estão no eixo imaginário (λ=jω), os modos correspondentes $t^k e^{j\omega t} = t^k \left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$tendem para infinito à medida que t à • . Assim, raízes repetidas no eixo imaginário provocam instabilidade.

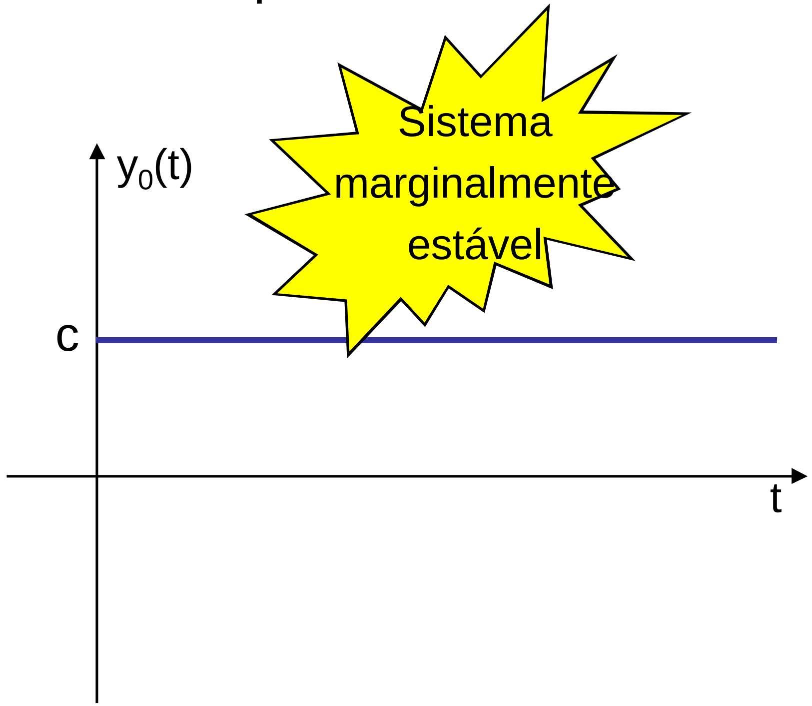
Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características



Raíz real nula

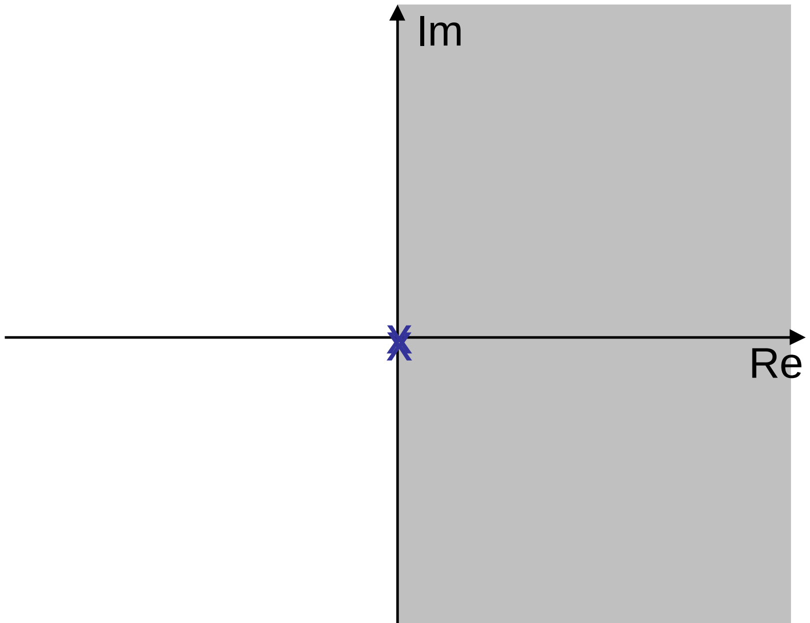
Resposta a entrada-nula



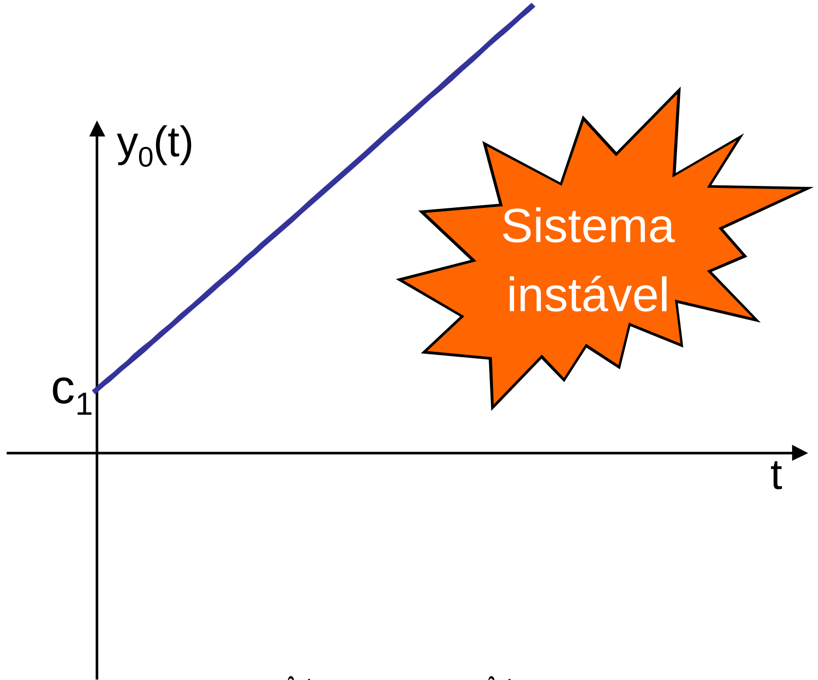
$$\lambda = 0 \quad y_0(t) = ce^{\lambda t} \rightarrow y_0(t) = c$$

Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características



Resposta a entrada-nula



$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

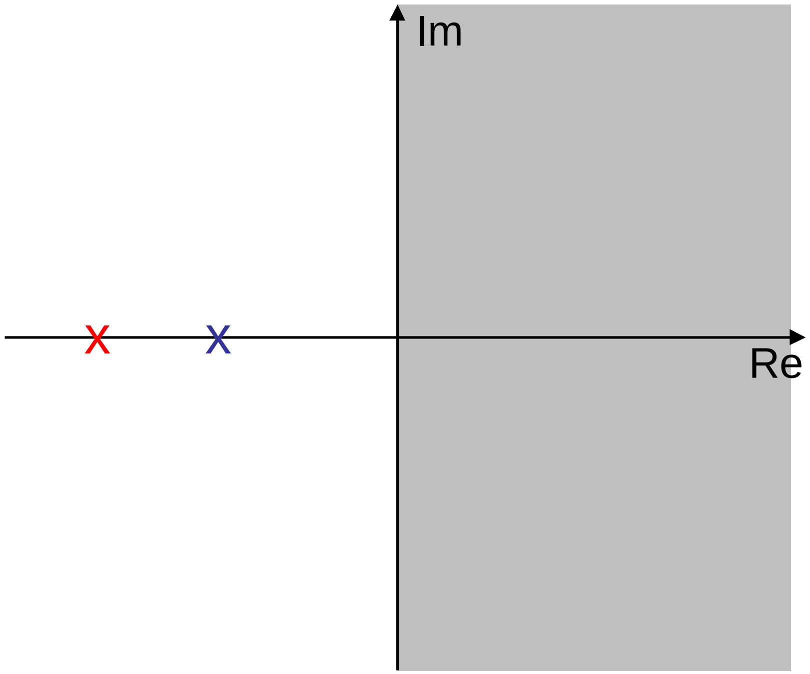
$$\lambda = 0 \vee \lambda = 0$$

$$y_0(t) = c_1 + c_2 t$$

Raíz dupla real nula

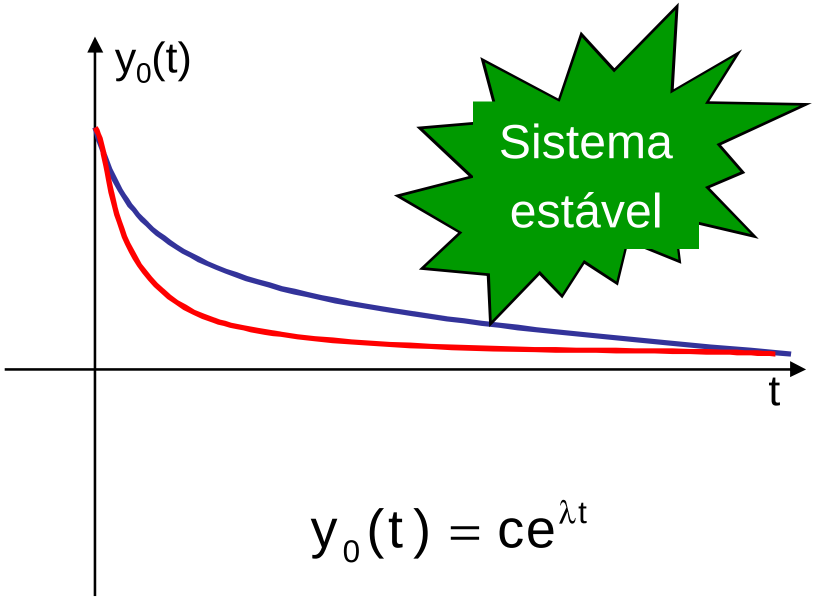
Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características



Raízes simples reais negativas

Resposta a entrada-nula

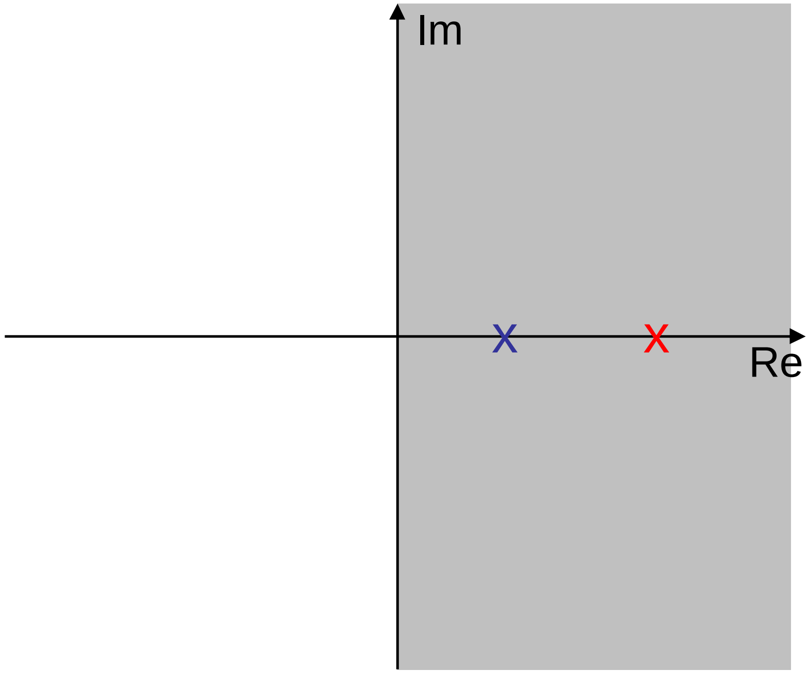


$$y_0(t) = ce^{\lambda t}$$

$$\lambda < 0$$

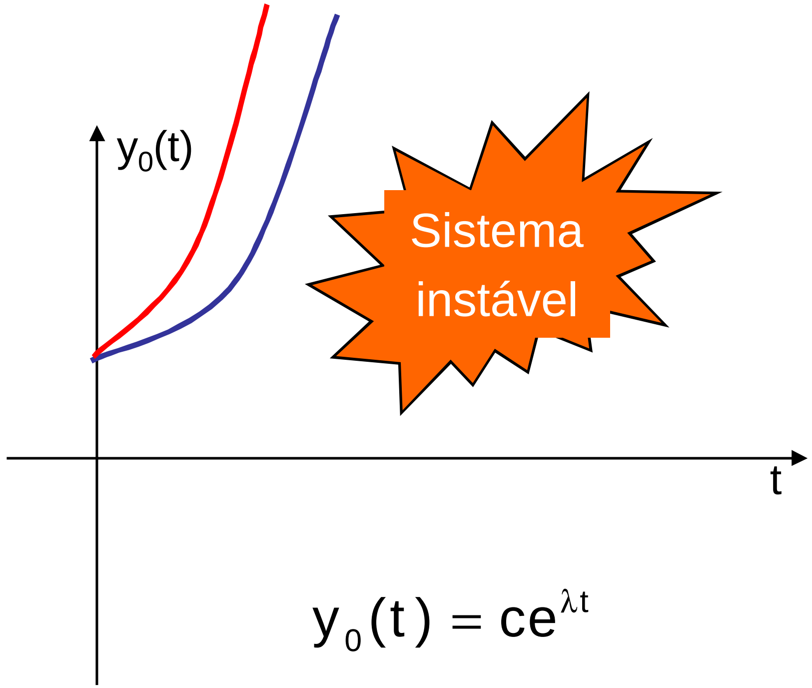
Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características



Raízes simples reais positivas

Resposta a entrada-nula

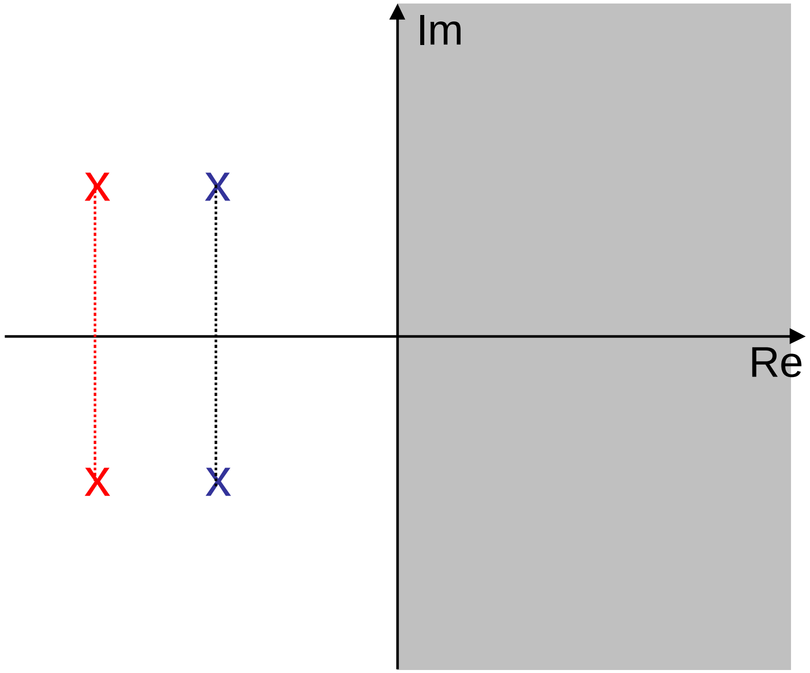


$$y_0(t) = ce^{\lambda t}$$

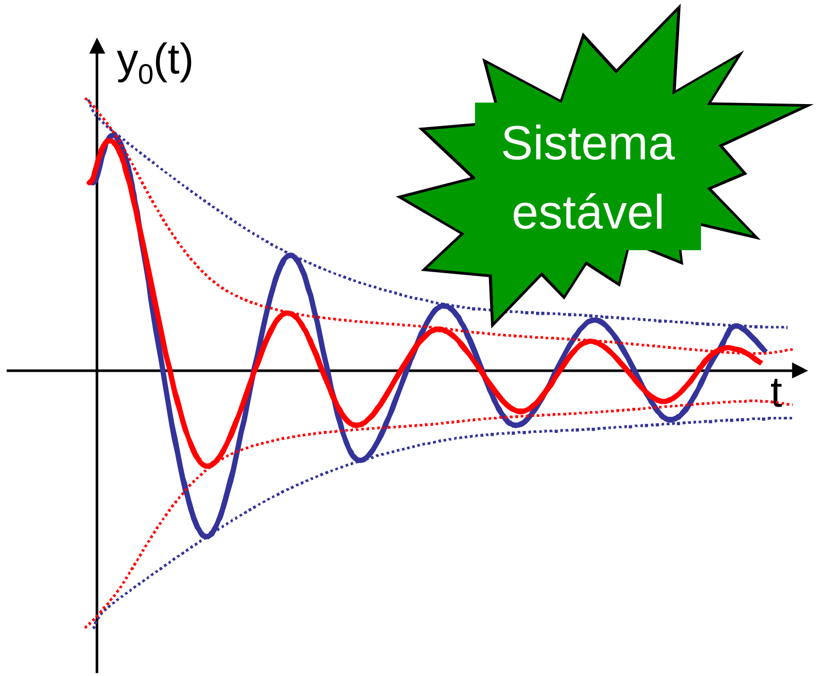
$$\lambda > 0$$

Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características



Resposta a entrada-nula



$$y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

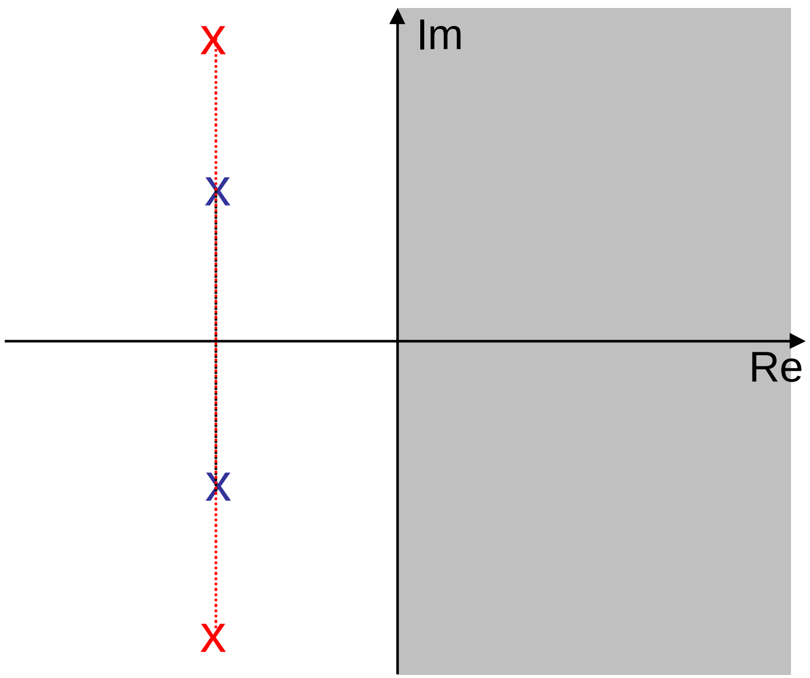
Raízes complexas com parte real negativa

$$\lambda = \alpha \pm j\beta$$

$$\alpha < 0$$

Localização das raízes características •   estabilidade

Localização das raízes características

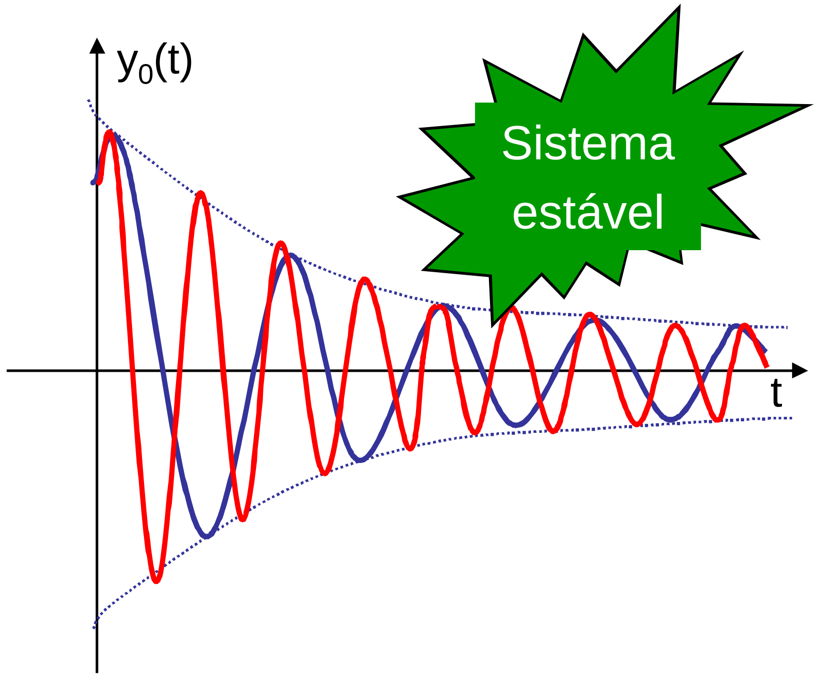


Raízes complexas com parte real negativa

$$\lambda = \alpha \pm j\beta$$

$$\alpha < 0$$

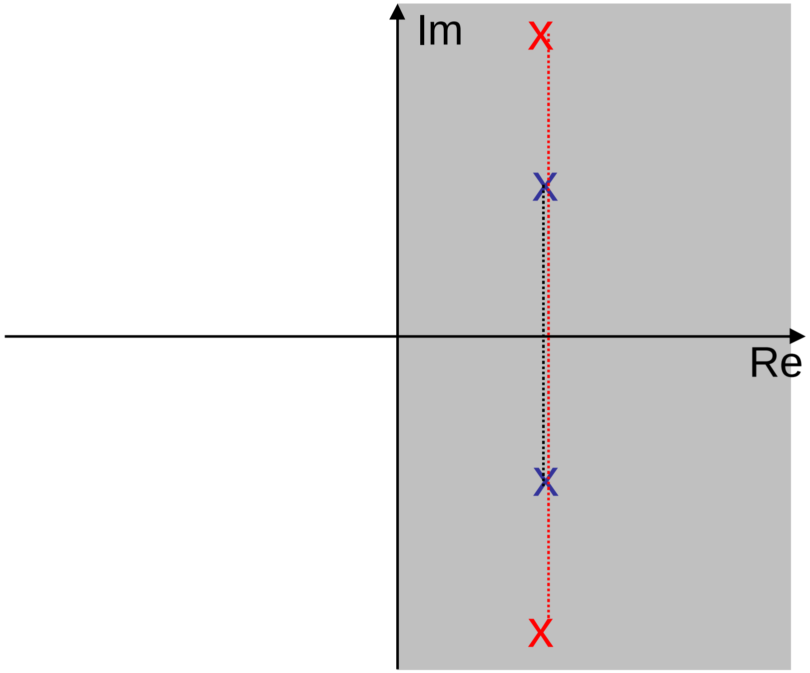
Resposta a entrada-nula



$$y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características

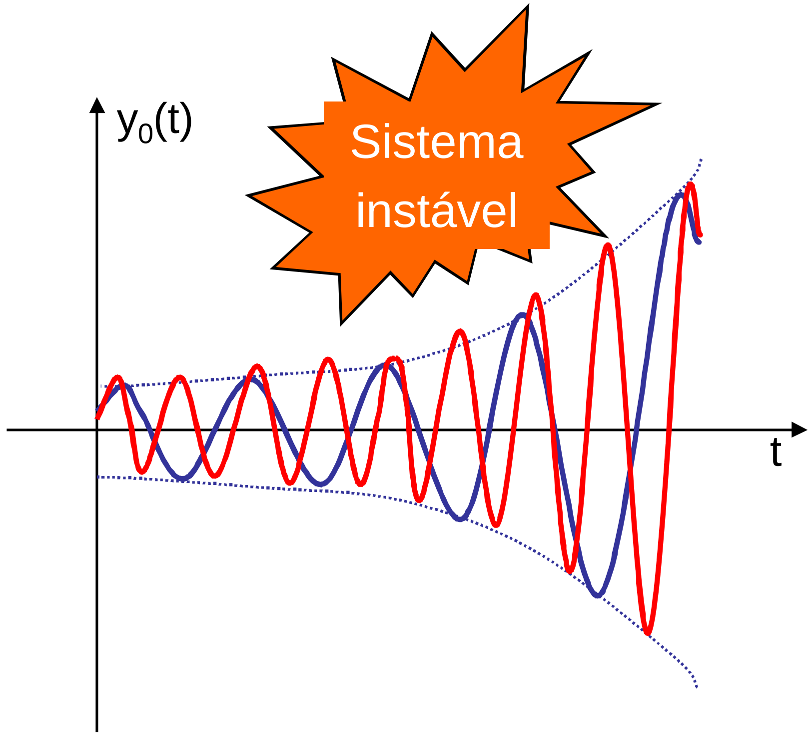


Raízes complexas com parte real positiva

$$\lambda = \alpha \pm j\beta$$

$$\alpha > 0$$

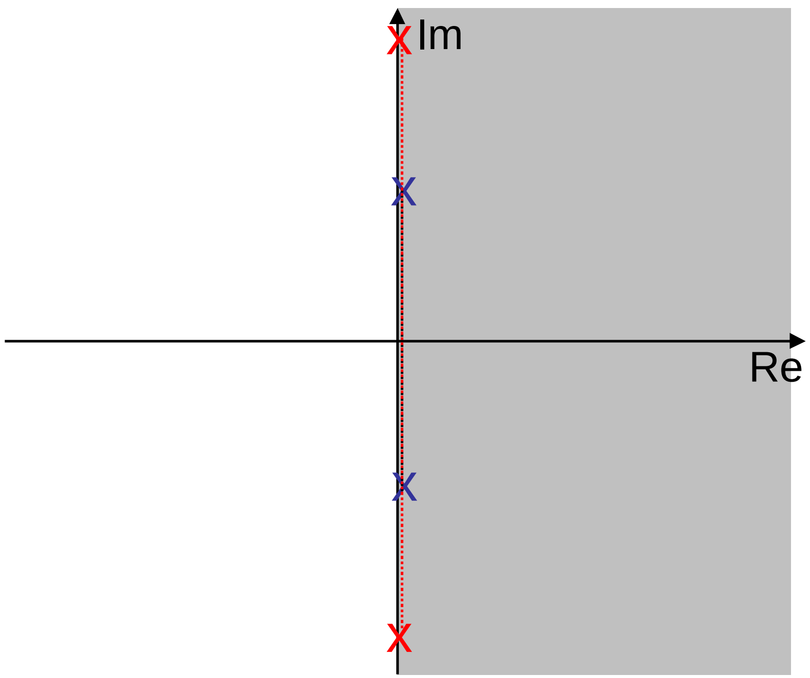
Resposta a entrada-nula



$$y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características

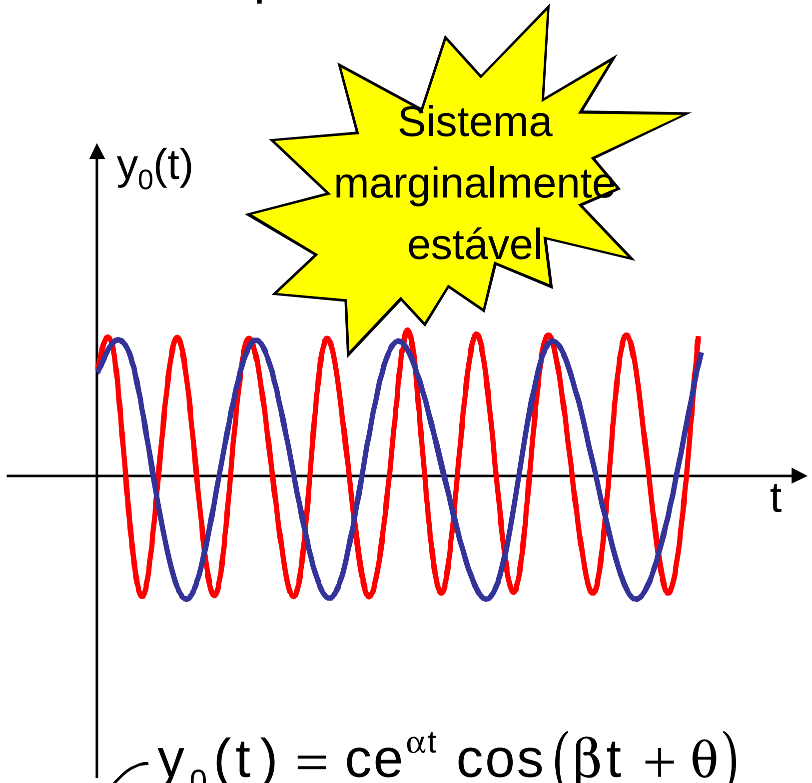


Raízes complexas com parte real nula

(imaginárias puras)

$\lambda = \alpha \pm j\beta \qquad \alpha = 0$

Resposta a entrada-nula



$$y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

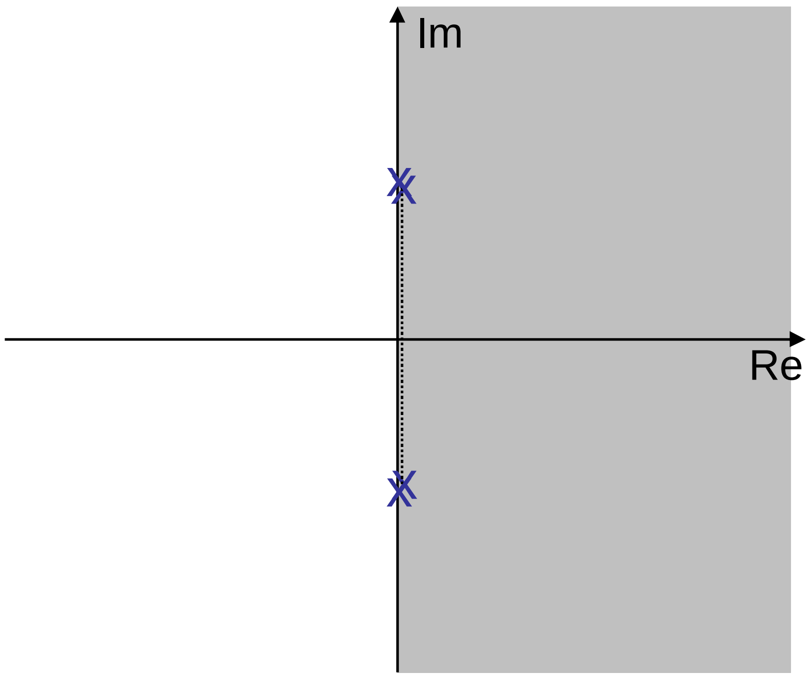
$$\alpha = 0$$

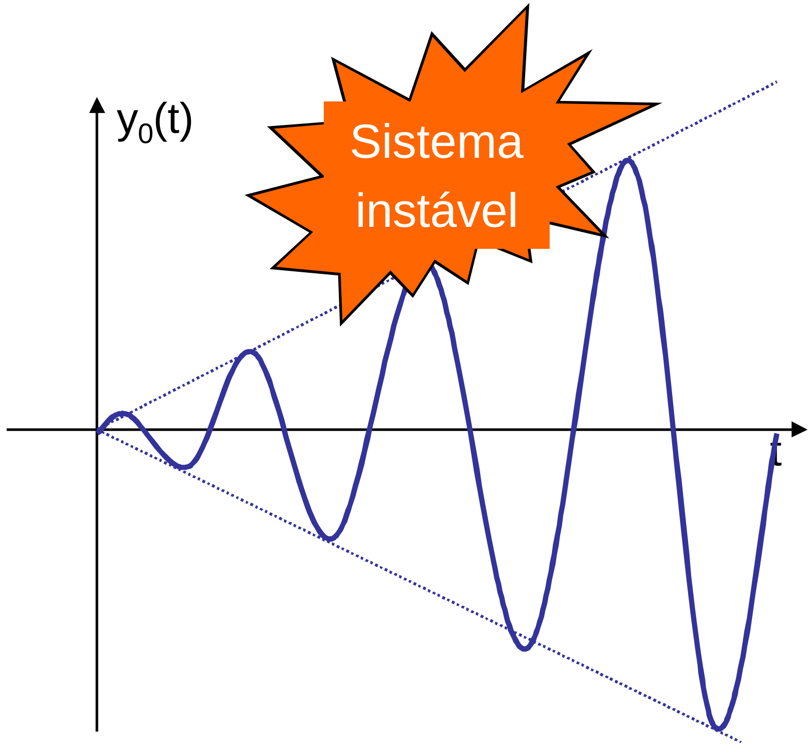
$$y_0(t) = c\cos(\beta t + \theta)$$

Localização das raízes características • estabilidade

Localização das raízes características

Resposta a entrada-nula





Raízes complexas duplas com parte real nula

(raízes imaginárias puras duplas)

Estabilidade de um sistema

Sumariando:

1- Um sistema LITC é estável se, e só se, todas as raízes características se encontram na parte esquerda do plano complexo. As raízes podem ser simples ou múltiplas.

2- Um sistema LITC é instável se, e só se, uma ou ambas das seguintes condições se verificarem: i) pelo menos uma das raízes se encontra na metade direita do plano complexo; ii) existem raízes repetidas no eixo imaginário.

3- Um sistema LITC é marginalmente estável se, e só se, não existem raízes na metade direita, e existem raízes simples (não repetidas) no eixo imaginário.

Questões??