INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU

ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA DE VISEU

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Apontamentos: Curso de Conhecimentos Básicos de Matemática

Cursos do Departamento de Gestão

Maria Cristina Peixoto Matos

Janeiro 2009

Conteúdo

Capítulo 1

Números Reais

Os matemáticos associam a cada número um ponto de uma recta. Por exemplo,

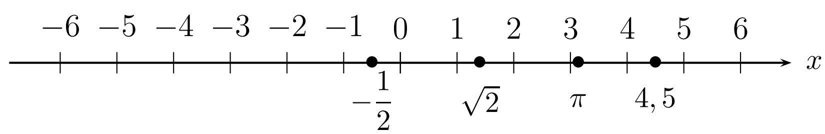


Figura 1.1: Recta real.

A esta recta chama-se recta real ou recta numérica.

Definição 1.1. *A cada ponto da recta real corresponde um número real e a cada número real corresponde um ponto da recta.*

Conjuntos de Números

- Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$

- Conjunto dos números inteiros relativos: $\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots\}$

- Conjunto dos números racionais relativos: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{x : x \text{ é fraccionário}\}$

- Conjunto dos números reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{x : x \text{ é irracional}\}$

Todo o número natural é inteiro, é racional e real. Todo o número inteiro é racional e real e todo o número racional é real. Logo,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

1.1 Conjunto dos Números Naturais

Neste conjunto a adição é sempre possível pois, se considerarmos dois números a e b, existe sempre um número natural c que é a soma de a com b. A multiplicação também é sempre possível. Quer a adição quer a multiplicação verificam as seguintes propriedades:

- comutativa: quaisquer que sejam os números naturais a e b,

$$a + b = b + a \text{ e } a \times b = b \times a.$$

- associativa: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ e } (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

- a multiplicação distributiva em relação à adição,

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \text{ e } a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

- sendo a e b números naturais, se for possível determinar x tal que:

$$b \times x = a \Leftrightarrow x = a \div b \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$$

  dizemos que x representa o quociente exacto de a por b.

Exemplo 1.2. $4 = 8 \div 2$ *pois* $4 \times 2 = 8$.

Nota 1.3. *A divisão exacta nem sempre é possível no conjunto dos números naturais. Não existe nenhum número natural* x*, tal que* $3 \times\ x = 2$*. Para que a divisão exacta se torne possível, é preciso ampliar o conjunto dos números naturais, acrescentando-lhe os números fraccionários positivos. No exemplo anterior, o quociente de* 2 *por* 3*, que não era possível em* $\mathbb{N}$*, representa agora o número fraccionário* $\frac{2}{3}$*, em que* 2 *é o numerador e* 3 *o denominador.*

1.2 Conjunto dos Números Inteiros Relativos

É claro que as propriedades já enunciadas, para a adição e multiplicação, permanecem válidas ao alargar o conjunto dos números naturais.

1.3 Conjunto dos Números Racionais Relativos

Definição 1.4. *Um número é fraccionário se for da forma* $\frac{a}{b}$*, com* a *e* $b \neq 0$ *inteiros e cujo quociente não é inteiro. A um número fraccionário corresponde uma dízima finita ou infinita periódica.*

Exemplo 1.5.

$\frac{4}{3}$ *é fraccionário;* $\frac{1}{2} = 0,5$ *é fraccionário pois é uma dízima finita;*

$\frac{8}{2} = 4$ *não é fraccionário;* $\frac{9}{11} = 0,818181 = 0,(81)$ *é fraccionário pois é uma dízima infinita periódica.*

Definição 1.6. *Duas fracções dizem-se equivalentes se representarem o mesmo número.*

Exemplo 1.7. $\frac{4}{2}$ *e* $\frac{16}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{7}$ *e* $\frac{10}{35}$.

Só podemos somar fracções com o mesmo denominador, sendo

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \tag{1.2}$$

ou

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}, \ b \neq d. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.8. $\frac{4}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$, $\qquad$ $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5 + 3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{31}{35}$.

Para multiplicar fracções, multiplicamos numerador com numerador, denominador com denominador, ou seja,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}. \tag{1.4}$$

Exemplo 1.9. $\frac{9}{21} \times \frac{5}{2} = \frac{9 \times 5}{21 \times 2} = \frac{45}{42}, \qquad \frac{7}{2} \times \frac{4}{2} = \frac{7 \times 4}{2 \times 2} = \frac{28}{4} = 7.$

É sempre possível dividir $\frac{a}{b},\ b \neq 0$ por $\frac{c}{d},\ d \neq 0$ em $\mathbb{Q}$ e tem-se,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.10. $\frac{9}{21} \div \frac{5}{2} = \frac{9 \times 2}{21 \times 5} = \frac{18}{105}.$

1.4 Conjunto dos Números Reais

Definição 1.11. *Números irracionais são todos os números fraccionários que representam dízimas infinitas não periódicas.*

Exemplo 1.12.

$\sqrt{2} = 1,414213562\cdots$ *é irracional pois é uma dízima infinita não periódica.* $\qquad \sqrt{4} = 2$ *não é irracional;*

1.5 Números Simétricos

Num eixo ou recta real, existem sempre dois pontos que estão à mesma distância da origem. Como podemos observar na figura seguinte, A e B distam 3 unidades da origem e C e D distam 2 unidades da origem.

Definição 1.13. *Dois números são simétricos se têm sinais contrários e se os pontos a que correspondem no eixo estão à mesma distância da origem.*

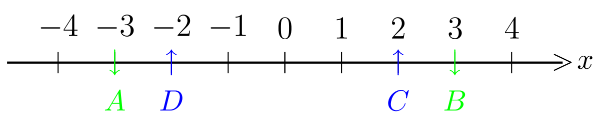


Figura 1.2: Números simétricos.

De um modo geral, tem-se que **o simétrico de a é −a**. Se a é positivo, $-a$ é negativo. se a é negativo, $-a$ é positivo. Daí que o **simétrico do simétrico é o próprio número**.

$$-(-a) = a \tag{1.6}$$

A equação (1.6) dá sentido às seguintes expressões:

$$-\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7} \qquad -\left(+\frac{5}{7}\right) = -\frac{5}{7}$$

E como, por convenção, podemos eliminar o sinal +, vem

$$+\left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{5}{7} \qquad +\left(+\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Podemos, assim, simplificar a escrita do seguinte modo:

$$+(+a) = a \qquad +(-a) = -a \qquad -(+a) = -a \qquad -(-a) = a$$

1.6 Valor Absoluto de um Número

Vimos que dois números simétricos estão à mesma distância da origem. Simbolicamente escreve-se: $|-3| = |+3| = 3$ e lê-se: "o valor absoluto de -3 é igual ao valor absoluto de $+3$ e é igual a 3."

Definição 1.14. *Módulo ou valor absoluto dum número é a distância desse ponto à origem.*

Nota 1.15. *Repare que o módulo ou valor absoluto de um número é sempre um valor não negativo.*

1.7 Produto e Quociente de Números Reais

Produto/Quociente de dois números	Sinal
do mesmo sinal	$+$
de sinais contrários	$-$

Figura 1.3: Regra de sinais do produto e do quociente.

Nota 1.16. *Recorde que o quociente de dois números é igual ao produto do dividendo pelo inverso do divisor.*

Exemplo 1.17.

$$\frac{1}{2} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} \qquad -\frac{2}{3} \div 2 = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{6} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{2} \qquad -0,5 \div (-0,25) = \frac{0,5}{0,25} = 2$$

1.8 Potências

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

(**a**) $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{a \text{ vezes}} = x^a$ (**b**) $x^a \times x^b = x^{a+b}$ (**c**) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ **d**) $(x^a)^b = x^{a\times b}$

(**e**) $(x \times y)^a = x^a \times y^a$ (**f**) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$ (**g**) $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$ (**h**) $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a},\ b \in \mathbb{N}$

Nota 1.18. *Vejamos qual o significado de* $x^0,\ x \neq 0$.

- *O quociente de um número por si próprio é* 1. *Ex:* $2^2 \div 2^2 = 1$.
- *O quociente de duas potências com a mesma base é uma potência com a mesma base e o expoente é a diferença dos expoentes. Ex:* $\dfrac{2^2}{2^2} = 2^{2-2} = 2^0$.

Logo,

$$x^0 = 1,\ x \neq 0. \tag{1.7}$$

1.9 Exercícios

1. Calcule:

$a)\ \dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{12}$ $\quad b)\ \dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{10}$ $\quad c)\ -\dfrac{5}{18}+\dfrac{7}{12}$ $\quad d)\ -\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{3}$

2. Simplifique:

$a)\ (-2)^4\times(-2)^3$ $\quad b)\ \dfrac{(-3)^{15}}{(-3)^8}$ $\quad c)\ 2^3+2^{10}\div 2^9$

$d)\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^6\times[(-3)^2]^3$ $\quad e)\ 2^3\times 32\div 16^2$ $\quad f)\ \dfrac{(3^2-3)3\div 2^3-5^2}{\sqrt{5+\sqrt{16}}}$ $\quad g)\ [(-2)^{-3}]^{-2}+(2^{-1})^{-2}$

3. Calcule:

$a)\ \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2\times(-5)^{-1}\div\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ $\quad b)\ \dfrac{(-3)^2\times 2^2\times(-6)^3}{(-2)^2\times 3^2}$

$c)\ (-1)^{30}+\left[\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-3}\div 5^3\times 2^2\right]^3$ $\quad d)\ \dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-5}\div 5^2\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\times\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^2}$

$e)\ \dfrac{(-1)^{11}+5^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}{(2^3)^2\div 2^{-3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^9\div 3^7}$ $\quad f)\dfrac{(-1,2)^5\times(-1,2)^5}{-1,2\times\left[\left(-\dfrac{6}{5}\right)^3\right]^2}$

4. Transforme em radicais:

$a)\ 3^{\frac{1}{2}}$ $\quad b)\ \left(5^{-2}\right)^{\frac{1}{5}}$ $\quad c)\ \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\quad d)\ \left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{5}{6}}$ $\quad e)\ \left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{3}{4}}$ $\quad f)\ \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^{-3}$

5. Sendo $a,\ b,\ c\neq 0$, simplifique e apresente o resultado com expoentes positivos:

$a)\ \dfrac{a^2\times b^5}{a^2\times b^{-2}}$ $\quad b)\ \dfrac{a^{-3}\times b^5\times c^4}{a^{-2}\times b^2\times c}$ $\quad c)\ \dfrac{4^{-2}\times a^{-3}\times b^4\times c^{-2}}{2^{-3}\times b^2\times a^{-1}\times c^2}$

Capítulo 2

Polinómios

Definição 2.1. *Monómio é uma expressão onde não figuram adições nem subtracções e que é constituída por um número ou uma letra, ou por um produto de números e letras, estas com expoentes naturais.*

À soma algébrica de monómios chama-se polinómio. Um polinómio soma de dois monómios designa-se por binómio.

Chama-se polinómio de grau n na variável x a toda a expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{2.1}$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.

$a_0x^n,\ a_1x^{n-1},\ \cdots,\ a_{n-1}x,\ a_n$ dizem-se termos do polinómio.

$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$ chamam-se coeficientes do polinómio sendo a_n designado termo independente.

Exemplo 2.2.

- $12,\ 3x,\ 2b^2$ *são monómios.*

  Note que: $3x = 3 \times x$

  $2b^2 = 2 \times\ b \times b.$

- $2x + 3,\ 5(a+1)^3,\ y^4 - 3y^2 + 5$ *são polinómios.*

As expressões

$$5(x+2)^2 \text{ e } 5x^2+20x+20$$

são equivalentes e ambas são polinómios, mas a segunda está escrita sob a forma de **polinómio reduzido e ordenado**.

Nota 2.3. *Reduzir um polinómio significa escrevê-lo de modo a que não apareçam monómios semelhantes, isto é, monómios do mesmo grau. Ordenar um polinómio é escrevê-lo segundo as potências crescentes ou decrescentes da variável do polinómio. Um polinómio de grau n é completo se todos os coeficientes dos termos de grau inferior a n são não nulos.*

Exemplo 2.4.

- $20x+16x^2+5+x^2+4 \rightarrow$ *polinómio de grau* 2 *não reduzido e não ordenado;*
- $20x+17x^2+9 \rightarrow$ *polinómio de grau* 2 *reduzido e não ordenado;*
- $17x^2+20x+9 \rightarrow$ *polinómio de grau* 2 *reduzido e ordenado;*
- $4z^5+3z^2+z \rightarrow$ *polinómio de grau* 5 *reduzido, ordenado não completo;*
- $4z^5+2z^4+7z^3+3z^2+z+5 \rightarrow$ *polinómio de grau* 5 *reduzido, ordenado e completo;*
- $0y^2+0y+0 \rightarrow$ *polinómio nulo pois tem todos os coeficientes nulos.*

2.1 Operações com Polinómios

2.2 Adição e Subtracção

Adicionamos dois polinómios reduzindo os termos semelhantes através da aplicação das propriedades comutativa e associativa da adição e distributividade da multiplicação em relação à adição.

Exemplo 2.5.

- $(4x^2+2x+7)+(8x^3+6x^2+1) = 8x^3+(4+6)x^2+2x+(7+1) = 8x^3+10x^2+2x+8.$
- $\left(x^2+\dfrac{x}{2}+1\right)+\left(3x^2+\dfrac{x}{5}\right) = (1+3)x^2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\right)x+1 = 4x^2+\dfrac{7}{10}x+1.$

Para subtrair dois polinómios adiciona-se, ao aditivo, o simétrico do subtractivo.

Exemplo 2.6.

- $$\begin{aligned}(x^2+4)-(4x^2+5x-2) &= (x^2+4)+(-4x^2-5x+2) = (1-4)x^2-5x+(4+2) = \\ &= -3x^2-5x+6.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{3}-1\right)-\left(2x^2+\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{x^2}{3}-1\right)+\left(-2x^2-\frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{3}-2\right)x^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2.3 Multiplicação

Multiplicamos dois polinómios multiplicando cada monómio de um deles pelos monómios do outro. O produto de dois polinómios é a soma de todos os produtos anteriormente obtidos. Isto é, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição e, em seguida, adicionamos os termos semelhantes.

Exemplo 2.7.

- $$\begin{aligned}(3x+5)\times(4x^2-3) &= 3x\times(4x^2-3)+5\times(4x^2-3) = \\ &= 3x\times 4x^2-3x\times 3+5\times 4x^2-5\times 3 = \\ &= 4\times 3\times\ x\times\ x^2-3\times 3\times\ x+5\times 4\times\ x^2-5\times 3 = \\ &= 12x^3-9x+20x^2-15 = 12x^3+20x^2-9x-15.\end{aligned}$$

2.4 Divisão Inteira de Polinómios

No conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, efectuar a divisão inteira de um número D (dividendo) por um número d (divisor) é encontrar um número natural q (quociente) e um natural r (resto), tais que:

$$D = d \times \ q + r, \quad r < d. \tag{2.2}$$

Se o resto é zero, então

$$D = d \times \ q. \tag{2.3}$$

Definição 2.8. *Para quaisquer polinómios $A(x)$ e $B(x)$ existem polinómios únicos $Q(x)$ e $R(x)$ que verificam simultaneamente:*

- $A(x) = B(x) \times \ Q(x) + R(x)$,
- *grau* $R(x) <$ *grau* $B(x)$.

Os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ chamam-se, respectivamente, quociente e resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

Se $R(x)$ é o polinómio nulo temos $A(x) = B(x) \times \ Q(x)$. Neste caso $A(x)$ é divisível por $B(x)$.

Exemplo 2.9. *Calcule o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x) = x^3+6x^2+7x-1$ por $B(x) = x + 3$.*

Aplicando o algoritmo da divisão inteira de polinómios obtemos:

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 + 6x^2 & + 7x & - 1 & \ x+3 \\ \cline{4-4}
-x^3 - 3x^2 & & & x^2+3x-2 \\ \cline{1-3}
0 + 3x^2 & + 7x & - 1 & \\
- 3x^2 & - 9x & & \\ \cline{1-3}
0 & - 2x & - 1 & \\
 & +2x & + 6 & \\ \cline{1-3}
 & & 0 + 5 &
\end{array}$$

Logo $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $R(x) = 5$.

Algoritmo da Divisão Inteira de Polinómios:

1. Começamos por escrever, ordenadamente, o dividendo e o divisor segundo as potências decrescentes de x, incluindo os termos nulos do dividendo, se existirem.
2. Seguidamente dividimos os termos de maior grau do dividendo e do divisor.

   No exemplo anterior temos: $x^3 \div\ x = x^2$.
3. Neste passo, multiplicamos o divisor pelo termo de maior grau do quociente, escrevemos o simétrico desse produto e adicionamos ao dividendo. Obtemos o resto parcial.

   No exemplo anterior o resto parcial é: $3x^2 + 7x - 1$.
4. Agora dividimos o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do divisor.

   No exemplo anterior temos: $3x^2\ \div\ x$.

   O resultado é o segundo termo do quociente. Repetimos este passo do processo até obtermos $R(x) = 0$ ou até que o grau do resto seja inferior ao grau do quociente.

   No exemplo anterior temos: $R(x) = 5$.

Nota 2.10. *Existe um processo mais simples que nos permite dividir polinómios de grau* n *por polinómios de grau* 1 *e que se designa por regra de Ruffini.*
Vamos resolver o exercício do exemplo 2.9 *utilizando a regra de Ruffini.*

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 6 & 7 & -1 \\
 & & & & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
\times & 1 & 3 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 6 & 7 & -1 \\
 & & & & \\
-3 & & -3 & -9 & \\
\hline
\times & 1 & 3 & -2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & 7 & -1 \\ & & & & \\ -3 & & -3 & -9 & 6 \\ \hline \times & 1 & 3 & -2 & |\ 5 \end{array}$$

Logo $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ *e* $R(x) = 5$.

2.5 Exercícios

1. Indique o coeficiente e a parte literal de cada um dos seguintes monómios:

a) $5xy^2$ *b)* $-xy^2z$ *c)* $\frac{4}{5}b$

2. Simplifique cada uma das expressões seguintes reduzindo os termos semelhantes :

a) $a + b + 3a - 3b + 7a$ *b)* $x + 3x^2 - \frac{x}{2} + 7x^2 + \frac{2}{3}x$ *c)* $mn + \frac{1}{2}m + 3n - 7m + 2n - \frac{mn}{3}$

3. Depois de reduzir e ordenar o polinómio:

$$\frac{3x^2 + x^3}{0,1} + \frac{1}{2}x + 3,$$

indique o grau, os termos nulos e o termo independente.

4. Dados os polinómios $R = x^3 - 3x^2 + 2$, $S = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ e $T = x^2 - x - 1$, determine

a) $R + S - T$ *b)* $-R + S + T$ *c)* $R - S - T$

5. Sendo $A = x - 3$, $B = \frac{x^2}{2} - 1$ e $C = 3x + 7$, calcule:

a) $A \times B - 3C$ *b)* $B - 2A$ *c)* $A \times B + B \times C - A \times C$

6. Qual o polinómio que se deve subtrair $7x^3 - x - 3$, para se obter $2 - x^2 - 3x$?

7. Transforme num polinómio reduzido:

a) $3(4-5x^2)$

b) $x(3-2x)-3(-x^2-8x+2)$

c) $a^2b(2-3a)-4a(ab+b-1)$

d) $-2x^2-[-5x-(6+2x-3x^2)]+x-2$

e) $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{5}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{1}{4}\right)$

f) $\left(-\frac{1}{2}x+1\right)-3\left(\frac{2}{3}x^2-2\right)\times\left(-\frac{3}{2}x\right)$

8. Efectue as operações indicadas e escreva a relação $\frac{D}{d}=Q+\frac{R}{d}$.

a) $(5x+3)\div(x+1)$

b) $(x^3+1)\div(x+1)$

c) $(4x^3+8x^2+1)\div(2x^2+3x-1)$

d) $\left(\frac{1}{2}x^2-3x^3+2x\right)\div(3x-2)$

e) $(4x^3-3x^2+13x+x^5)\div(x^2-2x+3)$

f) $(1-x^2)\div(x^2-4)$

9. Utilize a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto da divisão em cada um dos casos seguintes:

a) $(2a^2+6a+1)\div(a+3)$

b) $(2y^3-3y+1)\div\left(y-\frac{1}{2}\right)$

c) $(x^3+2x+3)\div(2x+3)$

d) $\frac{3x^3+5x^2+x-5}{3x-1}$

e) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$

f) $\frac{x^5+1}{x+3}$

g) $(3x^2+x+2)\div(x-2)$

h) $(5x+3)\div(x+1)$

i) $(2a^2+6a+1)\div(a+3)$

j) $(2y^3-3y+1)\div\left(y-\frac{1}{2}\right)$

k) $(x^3+2x+3)\div(2x+3)$

l) $(x^3+1)\div(x+1)$

Capítulo 3

Equações e Inequações do 1º Grau

3.1 Equações do 1º Grau

Consideremos a igualdade numérica:

$$4 + 5 = 9$$

Substituindo, por exemplo, 5 por x, vem:

$$4 + x = 9. \tag{3.1}$$

Definição 3.1. *Uma equação é uma igualdade onde figura pelo menos uma letra.*
As letras que aparecem na equação são designadas por incógnitas e representam valores desconhecidos.
Resolver uma equação é determinar o valor da incógnita que transforma a equação numa proposição verdadeira. Esse valor chama-se raiz ou solução da equação.

Na equação (3.1), x é a incógnita e 5 é a solução.

Existem equações em que não é simples encontrar mentalmente a solução. Para resolvermos essas equações vamos sucessivamente procurar outras mais simples, mas **equivalentes** entre si.

Definição 3.2. *Equações equivalentes são aquelas que têm o mesmo conjunto de soluções.*

Para resolver uma equação do 1º grau, devem seguir-se os seguintes passos:

- Tirar os parêntesis,
- Desembaraçar de denominadores,
- Passar para o primeiro membro os termos da incógnita e para o segundo membro os termos independentes, trocando-lhes o sinal,
- Efectuar as operações indicadas em cada um dos membros,
- Dividir ambos os membros pelo coeficiente da incógnita
- Efectuar as operações indicadas no 2º membro,
- Indicar a solução.

Exemplo 3.3. *Vamos resolver a seguinte equação de acordo com o estabelecido anteriormente:*

$$\begin{aligned} \frac{5(2x-5)}{4} = \frac{x+3}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{10x-25}{4} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 10x - 25 = 2x + 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 10x - 2x = 25 + 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 8x = 31 \Leftrightarrow x = \frac{31}{8} \qquad \Rightarrow \ \texttt{Solução da equação é } x \in \left\{\frac{31}{8}\right\}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4. *Um industrial fabrica um produto com um custo de* $0,65$ *euros e vende-o a* $1,20$ *euros por unidade. O investimento inicial para fabricar o produto foi de* $10\ 000$ *euros. Quantas unidades deve vender para atingir o ponto de equilíbrio?*

Resolução: *Como podemos observar a solução deste problema é a solução de uma equação, logo temos de encontrar a equação correspondente e a respectiva solução.*

1. ***Dados do problema:***

   Cada unidade custa $0,65$ *euros para ser produzida.*
   Cada unidade é vendida a $1,20$ *euros .*
   Custo inicial de fabricação foi de $10\ 000$ *euros.*

2. ***Incógnita:*** *Devemos escolher uma letra para representar um número desconhecido, de tal modo que, conhecido esse número, se encontre uma solução para o problema.*

   x - *nº de unidades a fabricar*
   $C(x) = 0,65x + 10\ 000$ - *custo total de produção de x unidades*
   $R(x) = 1,2x$ - *receita total da venda de x unidades*

3. ***Equacionar o problema:*** $0,65x + 10\ 000 = 1,2x$

4. ***Resolver a equação:***

$$\begin{aligned} 0,65x + 10\ 000 = 1,2x &\Leftrightarrow 0,65x - 1,2x = -10\ 000 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,55x = -10\ 000 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-10\ 000}{-0,55} \Leftrightarrow x \simeq 18\ 182 \end{aligned}$$

5. ***Interpretar o resultado:*** *Voltar a ler o enunciado e, utilizando o número encontrado, procurar dar uma solução para o problema.*

   Assim o industrial deve vender 18 182 *unidades para atingir o ponto de equilíbrio.*

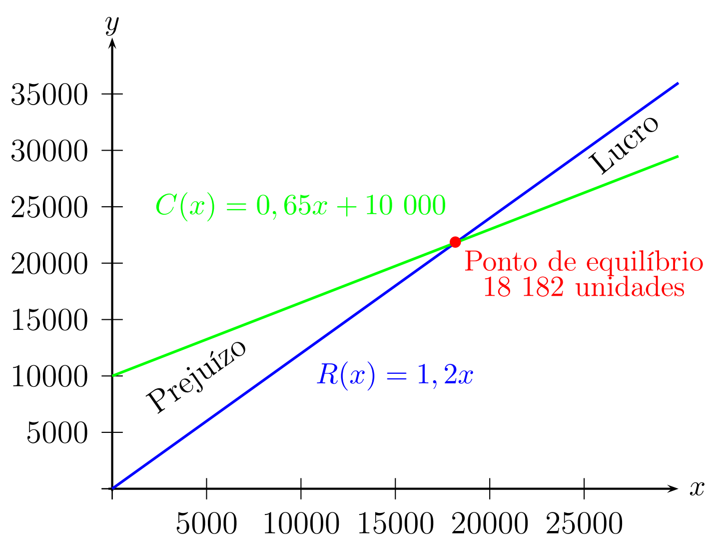


Figura 3.1: Análise do ponto de equilíbrio.

3.2 Classificação de Equações do 1º Grau

Exemplo 3.5. *Resolva as seguintes equações:*
$a)$ $x-3=1+x$ $\quad b)$ $x+\dfrac{1}{2}=0,5+x$

Resolução:

$$a) \qquad \begin{aligned} x-3=1+x &\Leftrightarrow x-x=1+3 \Leftrightarrow 0\times x=4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0=4 \end{aligned}$$

A equação não tem solução, chegamos a uma impossibilidade.

$$b) \qquad \begin{aligned} x+\frac{1}{2}=0,5+x &\Leftrightarrow x-x=0,5-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-x=0,5-0,5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0\times x=0 \Leftrightarrow 0=0 \end{aligned}$$

Qualquer valor que atríbuamos a x é solução da equação.

Como pudemos verificar a 1ª equação não tem solução e a 2ª equação tem uma infinidade de soluções. Desta forma podemos, de acordo com o conjunto solução, classificar as equações em:

Definição 3.6.

- *Uma equação diz-se* ***impossível*** *se não tem nenhuma solução.*
- *Uma equação diz-se* ***possível determinada*** *se tem uma única solução.*
- *Uma equação diz-se* ***possível indeterminada*** *se tem um número infinito de soluções.*

3.3 Raízes de um Polinómio

Definição 3.7. *Dado um polinómio*

$$A(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \tag{3.2}$$

dizemos que um número α é uma raiz real ou um zero de $A(x)$ se

$$A(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{3.3}$$

As raízes reais de um polinómio $A(x)$ são portanto as soluções reais da equação polinomial

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{3.4}$$

Note que se $A(x)$ é um polinómio e α é um número real, então o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x - \alpha$ é $A(\alpha)$. Isto significa que existe um polinómio $Q(x)$ tal que

$$A(x) = Q(x)(x - \alpha) + A(\alpha), \tag{3.5}$$

e portanto

$$\alpha \texttt{ é raiz de } A(x) \Leftrightarrow A(x) \texttt{ é divisível por } x - \alpha. \tag{3.6}$$

Recorde que esta equivalência fundamental desempenha um papel importante no cálculo das raízes reais de um polinómio. Em particular permite demonstrar que qualquer polinómio de grau n não pode ter mais do que n raízes.

3.4 Intervalos de Números Reais

Definição 3.8. *Os números reais podem ser representados num sistema coordenado chamado* ***recta real*** *(ou eixo x). A* ***direcção positiva*** *(para a direita) é representada por uma seta e indica a direcção dos valores crescentes de x. O número real correspondente a um ponto particular da recta real chama-se* ***coordenada*** *do ponto. O ponto da recta real correspondente a zero chama-se* ***origem****. Os números à direita da origem são positivos, e os números à esquerda da origem são negativos. O termo* ***não negativo*** *designa um número que é positivo ou zero.*

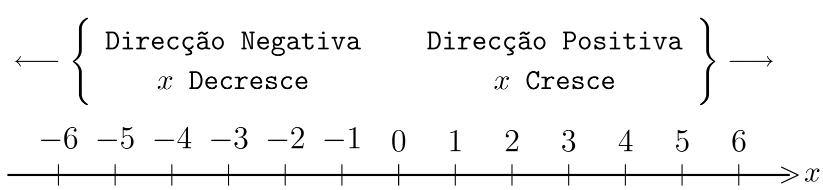


Figura 3.2: Recta real.

A cada ponto na recta real corresponde um e um só número real, e a cada número real corresponde um e um só ponto na recta real. Esta relação (correspondência biunívoca) é ilustrada na figura seguinte.

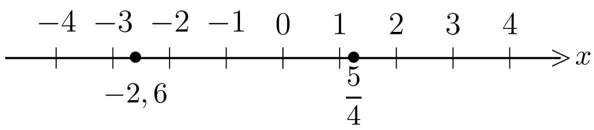


Figura 3.3: Todo o ponto da recta real corresponde a um número real.

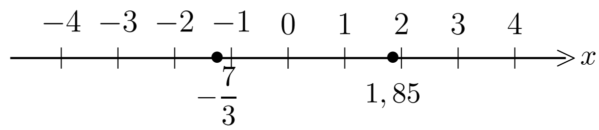


Figura 3.4: Todo o número real corresponde a um ponto da recta real.

Uma propriedade muito importante dos números reais é que eles se apresentam ordenados. Sabemos que $-3 < 1$, $-2,5\pi < \dfrac{22}{7}$, etc. Observando a recta real podemos afirmar que:

"a é menor que b, simbolicamente $a < b$, se e só se a está à esquerda de b".

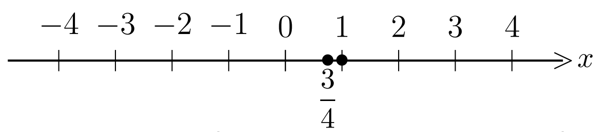


Figura 3.5: Estando $\frac{3}{4}$ à esquerda de 1 temos que $\frac{3}{4} < 1$.

Quando três números reais a, x, b estão ordenados de modo que $a < x$ e $x < b$, dizemos que x está **compreendido entre** a e b e escrevemos

$$a < x < b$$

Definição 3.9.

- *O conjunto de* todos *os números reais entre a e b é chamado* ***intervalo aberto*** *entre a e b e representa-se por* (a, b) *ou* $]a, b[$. *Este conjunto é definido pela condição* $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. *Um intervalo da forma* (a, b) *não contém os seus pontos extremos a e b.*

- *Os intervalos que incluem os extremos chamam-se* ***fechados*** *e representam-se por* $[a, b]$, *são definidos pela condição* $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

- *Os intervalos* $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ *chamam-se intervalos* ***semi abertos***. *São definidos, respectivamente, pelas condições*

  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ *e* $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

- *Os intervalos da forma* $(a, +\infty)$ *e* $(-\infty, b)$ *são intervalos* ***abertos*** *e são definidos pelas condições* $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *e* $\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, *respectivamente.*

Nota 3.10. *A reunião do intervalo A com o intervalo B representado por $A \cup B$ é constituído por todos os elementos de ambos os intervalos. A intersecção do intervalo A com o intervalo B representado por $A \cap B$ é constituído por todos os elementos comuns aos dois intervalos.*

Exemplo 3.11.

- $A \cup B = [0,5] \cup]-3,3[=]-3,5]$.

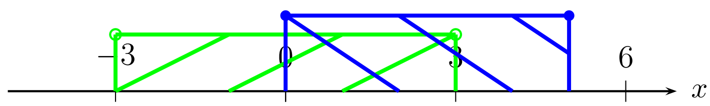


Figura 3.6: União de intervalos.

- $A \cap B = [0,5] \cap]-3,3[= [0,3[$.

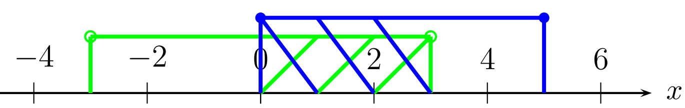


Figura 3.7: Intersecção de intervalos.

3.5 Inequações do 1º Grau

Consideremos o seguinte problema:

Qual é a minha idade actual se daqui a três anos a minha idade é inferior ao dobro da idade que tinha há 20 anos?

Traduzindo, o problema anterior, para linguagem matemática vem:

$x \longrightarrow$ idade actual
$x + 3 \longrightarrow$ idade daqui a três anos
$x - 20 \longrightarrow$ idade há vinte anos

Então temos,

$$x + 3 < 2(x - 20). \tag{3.7}$$

Definição 3.12. *Na expressão anterior aparece uma incógnita x e o símbolo $<$ entre duas expressões. A uma condição deste tipo chamamos* ***inequação do 1º grau****.*

Continuaríamos a ter uma inequação do primeiro grau se o símbolo fosse $>$, $\geq$ ou $\leq$.

Tal como nas equações, nas inequações temos dois membros. A um valor que colocado no lugar da incógnita transforma a inequação numa desigualdade numérica verdadeira chama-se ***solução da inequação****.*

Por exemplo, fazendo na inequação (3.7), $x = 40$ vem,

$$40 + 3 < 2(40 - 20) \Longrightarrow 43 < 40, \text{ proposição falsa.}$$

Logo $x = 40$ não é solução da inequação.

Mas se fizermos $x = 50$ vem,

$$50 + 3 < 2(50 - 20) \Longrightarrow 53 < 60, \text{ proposição verdadeira.}$$

Pelo que $x = 50$ é solução da inequação.

Para resolvermos inequações do 1º grau aplicamos regras idênticas às utilizadas na resolução de equações do 1º grau com uma excepção:

Quando multiplicamos ambos os membros de uma inequação por um número negativo temos de inverter o sinal da desigualdade.

Este princípio resulta do facto de que:

$$x < a \Longleftrightarrow -x > -a$$

Por exemplo, fazendo $x = 2$ e $a = 3$ temos:

$$2 < 3 \Longleftrightarrow -2 > -3 \text{ Proposição Verdadeira}$$

$$2 < 3 \Longleftrightarrow 3 < 2 \text{ Proposição Falsa}$$

Para resolver uma inequação do 1º grau, devem seguir-se os seguintes passos:

- Tirar os parêntesis;
- Passar para o primeiro membro os termos da incógnita e para o segundo membro os termos independentes, trocando-lhes o sinal;
- Efectuar as operações indicadas em cada um dos membros;
- Dividir ambos os membros pelo coeficiente da incógnita e **inverter o sinal da desigualdade quando a incógnita tem sinal negativo**;
- Efectuar as operações indicadas no 2º membro;
- Indicar a solução.

Vamos então resolver a inequação (3.7):

$$\begin{aligned} x+3<2(x-20) &\Leftrightarrow x+3<2x-40 \Leftrightarrow x-2x<-40-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x<-43 \Leftrightarrow x>43 \Leftrightarrow x\in\,]\,43,+\infty[. \end{aligned}$$

Resposta: A minha idade actual é superior a 43 anos.

3.6 Disjunção e Conjunção de Inequações

À disjunção ($\vee$) de inequações está associada a reunião ($\cup$) de conjuntos.

Exemplo 3.13. $x+1\geq 2 \vee x<-3 \Leftrightarrow x\geq 1 \vee x<-3.$

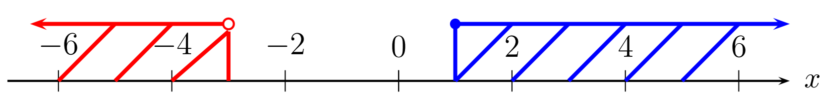


Figura 3.8: Disjunção de inequações.

Então, como podemos observar através da figura anterior, o conjunto-solução da disjunção das duas inequações é,

$$x\in\,]-\infty,-3[\cup[1,+\infty[.$$

À conjunção ($\wedge$) de inequações está associada a intersecção ($\cap$) de conjuntos.

Exemplo 3.14. $-\dfrac{x}{2} \geq -1 \wedge x-3 > -3 \Leftrightarrow -x \geq -2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x > 0.$

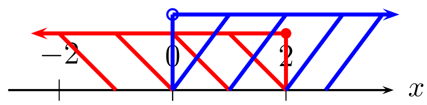


Figura 3.9: Disjunção de inequações.

Então, como podemos observar através da figura anterior, o conjunto-solução da disjunção das duas inequações é,

$$x \in \,]0,2].$$

3.7 Exercícios

1. Resolva mentalmente cada uma das seguintes equações:

a) $3+x=8$ **b**) $x+5=10$ **c**) $x-5=1$

d) $x-3=2$ **e**) $6x=12$ **f**) $3x=-15$

2. Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $x+3=1-x$ **b**) $3x+1=1-x+2$ **c**) $1+(x+1)=3$

d) $\dfrac{x-1}{2}=3$ **e**) $x-\dfrac{3(x-1)}{2}=2$ **f**) $\dfrac{1,5(x-1)}{2}-\dfrac{4x-3}{3}=\dfrac{1-5x}{6}$

g) $1-\dfrac{1-x}{2}=3$ **h**) $\dfrac{x-1}{2}-2(x-3)=0$ **i**) $x-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{5x}{3}+2x$

j) $\dfrac{x-1}{2}=3x$ **k**) $\dfrac{1-\frac{1}{2}x}{7}-\dfrac{x-\frac{1}{7}}{2}=0$ **l**) $0=\dfrac{3x-0,7}{4}-\dfrac{4\left(x-\frac{3}{5}\right)}{3}$

3. A soma de dois números pares consecutivos excede numa unidade o dobro do menor. Quais são os números?

4. Encontre o nível de vendas necessário para que uma empresa não tenha nem prejuízo nem lucro, se o custo para produzir x unidades é dado por $C = 5,5\sqrt{x} + 10\ 000$ e a receita pela venda de x unidades é dada por $R = 3,29x$.

5. Um empresário determinou que o custo de aquisição e armazenagem de x unidades de um produto é dado por $C = 6x + \dfrac{900\ 000}{x}$.

a) Escreva o custo como uma única fracção.

b) Determine o custo de aquisição e armazenagem de 240 unidades desse produto.

6. A diferença do dobro de um número pela sua terça parte é maior que o quíntuplo da soma desse número com dois.

a) Traduza para linguagem matemática o enunciado do problema.

b) Determine o maior número inteiro que satisfaz a condição enunciada.

7. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.

Represente sob a forma de intervalo de números reais:

a) Os conjuntos A e B.

b) $A \cup B$ e $A \cap B$.

c) $(A \cup B) \cap [2, +\infty[$.

8. Considere a inequação $\dfrac{2(x+1)}{3} + 1 \leq 2 - \dfrac{3(x-2)}{5}$.

a) Verifique se $\dfrac{3}{2}$ é solução da inequação.

b) Qual é o conjunto solução da inequação?

c) Determine o conjunto solução que se irá obter fazendo a conjunção da inequação dada com a inequação

$$\frac{2x-1}{4} + 2 \leq 1 - \frac{x-2}{2}.$$

9. Resolva cada uma das seguintes inequações:

a) $x - 1 < 5$ **b)** $2b + 1 \leq 9$ **c)** $\dfrac{3 - x}{2} \leq 1$ **d)** $-8x - 7 \leq -2x + 5$ **e)** $\dfrac{-x}{3} < 1$

f) $\dfrac{3}{4} > x + 1$ **g)** $x + 1 > \dfrac{1}{4}$ **h)** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} > 5$ **i)** $30 \leq 17 + 3x$

10. Nos exercícios seguintes, determine se cada afirmação é verdadeira ou falsa, sabendo que $a < b$.

a) $a - 1 > b - 1$ **b)** $-2a < -2b$ **c)** $6a < 6b$ **d)** $a - 4 < b - 4$

e) $4 - a < 4 - b$ **f)** $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ **g)** $\dfrac{a}{4} < \dfrac{b}{4}$ **h)** $-3b < -3a$

11. Considere a função $f(x) = -2\left(\dfrac{x-1}{3} + 1\right)$.

a) Resolva as equações $f(x) = 0$ e $f(x) = 1$.

b) Resolva a inequação $f(x) \geq -5$.

c) Quais os dois maiores números inteiro que verificam a condição $f(x) \geq -5$?

d) Determine os valores de x para os quais $f(x)$ é não positiva.

12. Determine o conjunto dos números inteiros que verificam simultaneamente as condições seguintes:

- A diferença entre cada um deles é quatro e negativa.
- A soma de quádruplo de cada um deles com dois é não negativa.

13. A família da Sofia foi de férias no Verão passado à ilha de São Miguel, nos Açores, e aí decidiram alugar um carro para visitar a ilha. Tiveram a possibilidade de escolha a agência de aluguer de automóveis "Cartur" e a "Calhambeque". A primeira praticava o preço de 9 euros fixo mais 15 cêntimos ao km e a segunda 14 euros fixos mais 12 cêntimos ao km. O pai da Sofia optou pela agência "Calhambeque", tendo percorrido $850km$. Terá sido a escolha mais económica? Justifique a sua resposta.

14. Além do custo administrativo fixo, diário, de 500 euros, o custo da produção de x unidades de certo produto é de $2,5$ euros por unidade. Durante o mês de Agosto, o custo total da produção variou entre o máximo de 1 325 euros e o mínimo de $1,2$ euros por dia. Determine os níveis de produção máximo e mínimo durante o mês.

15. A receita da venda de x unidades de um produto é $R = 115,95x$ e o custo da produção de x unidades é $C = 95x + 750$. Para que haja lucro, a receita de vendas há-de ser maior do que o custo. Para que valores de x este produto dará lucro?

16. Uma grande companhia tem uma frota de camionetas cujo custo operacional anual unitário é $C = 0,32m + 2\ 300$, onde m é o número de quilómetros percorridas por uma camioneta num ano.

Que número de quilómetros proporcionará um custo operacional anual, por camioneta, inferior a 10 000 euros?

17. Investem-se P euros à taxa anual r de juro(simples). Após t anos, o montante na conta é dado por $A = P + Prt$, onde a taxa de juros é expressa em forma decimal. Para que um investimento de 1 000 euros ultrapasse 1 250 euros em 2 anos, qual deve ser a taxa de juro?

18. Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : -20 \leq x \leq -\dfrac{12}{3}\right\}$.

a) Represente A na recta real.

b) Quantos elementos tem o conjunto $B = \left\{x \in \mathbb{Z} : -20 \leq x \leq -\dfrac{12}{3}\right\}$?

19. Indique sob a forma de intervalo, o conjunto-solução de cada uma das seguintes inequações:

a) $x \geq \dfrac{5}{2}$ **b**) $x \leq 3$ **c**) $5x - 5x \leq -5$ **d**) $x - x \geq 0$ **e**) $x < x$

20. Represente, utilizando intervalos de números reais, o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições:

a) $\begin{cases} 2x - 5 > 3x - 2 \\ 5x - 5 < 3x + 1 \end{cases}$ **b**) $\dfrac{1}{3} < \dfrac{x-3}{2} \leq 10$.

21. Dos pares de inequações seguintes indique, justificando, se as duas inequações são equivalentes.

a) $x > 1; \quad -x \leq -1$

b) $-3x \geq 0; \quad 3x \leq 0$

c) $-3x + 1 > 0; \quad -3x > -1$

d) $-5x + 2 < 3; \quad 5x - 2 < -3$

e) $1 \leq x; \quad x \geq 1$

22. Resolva cada uma das seguintes inequações e apresente o conjunto-solução sob a forma de intervalo de números reais.

a) $-2x > \dfrac{1}{2}$ **b)** $-2x + \dfrac{1}{3} > 0$ **c)** $-0,2x - \dfrac{1}{2} \leq -4x + 5$

d) $-3x - \dfrac{1}{2} \leq -4x + 5$ **e)** $\dfrac{1-3x}{2} > 1 - \dfrac{x-1}{3}$ **f)** $1 - \dfrac{x}{2} \geq \dfrac{3x-1}{4}$

23. Determine o menor inteiro que verifica a inequação:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} > \frac{1-2(x-1)}{6}$$

24. Considere o conjunto $A = \left]-\frac{9}{2}, 1\right[$.

a) Escreva todos os números inteiros pertencentes a A.

b) Seja
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4 + \frac{2-x}{3} \geq 6 \right\}.$$

i) Mostre que $B =]-\infty, -4]$.

ii) Determine $A \cap B$ e $A \cup B$

iii) Comente a seguinte afirmação "$A \cap B \subset]-\infty, 0[$ *e* $A \cup B \supset]-\infty, 0[$"

25. Quais são os números menores do que 4 cujo dobro é maior do que a diferença entre 5 e o seu triplo?

26. Determine os valores que d pode tomar de modo que a expressão:

$$3 - \frac{2(d-3)}{5}$$

represente um número pertencente ao intervalo $[-1, 2[$.

27. Considere a expressão

$$7 - (3x + 1).$$

Determine os valores de x de modo que a expressão tome:

a) um valor negativo;

b) um valor não negativo;

c) um valor do intervalo $[-3; +\infty[$.

Capítulo 4

Sistemas de Equações

4.1 O Plano Cartesiano

Assim como podemos representar números reais por pontos numa recta de números reais, podemos também representar pares ordenados de números reais por pontos num plano chamado **sistema de coordenadas rectangulares**, ou **plano cartesiano**.

Forma-se o plano cartesiano utilizando-se duas rectas que se intersectam segundo um ângulo recto. A recta horizontal costuma chamar-se **eixo dos XX**, e a recta vertical **eixo dos YY**. O ponto de intersecção desses dois eixos é a **origem**, e os dois eixos dividem o plano em quatro partes iguais chamadas **quadrantes**.

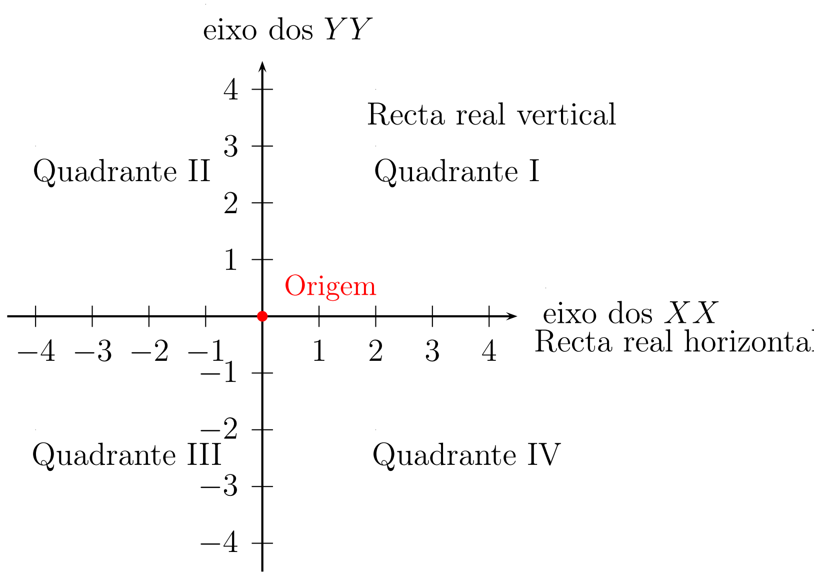


Figura 4.1: O plano cartesiano.

Cada ponto do plano corresponde a um par ordenado (x, y) de números reais x e y, chamados **coordenadas** do ponto.

A **coordenada x** representa a distância orientada do eixo y ao ponto, e a coordenada y representa a distância orientada do eixo x ao ponto.

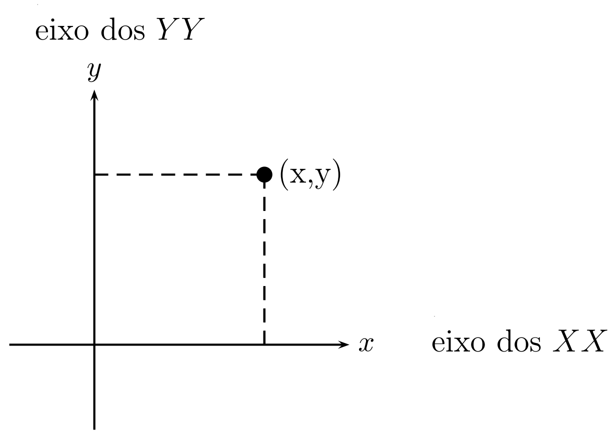


Figura 4.2: Representação gráfica do ponto de coordenadas (x, y).

Consideremos os pontos de coordenadas $(-1, 2)$, $(3, 4)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(-2, -3)$ e $(0, -2)$. Para marcar o ponto $(-1, 2)$, imaginemos uma recta vertical passando por -1 no eixo dos XX e uma recta horizontal passando por 2 no eixo dos YY. A intersecção dessas duas rectas é o ponto $(-1, 2)$. De maneira análoga marcam-se os outros pontos.

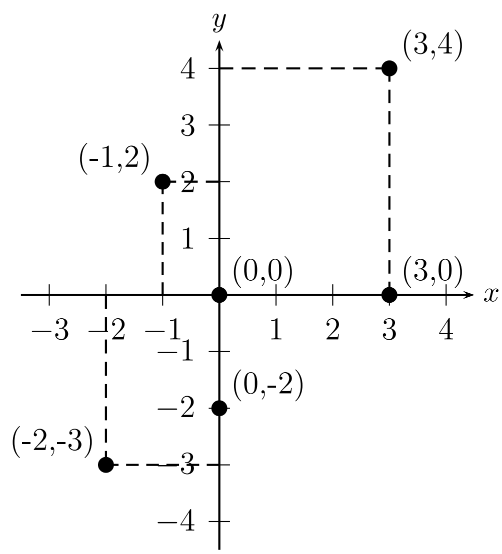


Figura 4.3: Representação gráfica de pontos no plano.

4.2 Equações Literais

Considere o seguinte problema:

Uma papelaria está a fazer uma promoção dos seus produtos. A promoção especial desta semana é:

"Dois cadernos + uma embalagem de canetas = 14 euros".

Quanto custará cada caderno? E a embalagem de canetas?

Seja:

- $x \rightarrow$ Designa o custo, em euros, de cada caderno,
- $y \rightarrow$ Designa o custo, em euros, da embalagem de canetas.

Tem-se:

$$2x + y = 14 \Leftrightarrow y = -2x + 14.$$

O problema tem muitas soluções:

- Cada caderno pode custar 1 euro e a embalagem de canetas 12 euros, ou
- cada caderno pode custar 2 euros e a embalagem de canetas 10, ou
- cada caderno pode custar 3 euros e a embalagem de canetas 8, ou $\cdots$.

Como podemos observar, são soluções da equação $y = 2x + 14$ os pares $(x, -2x + 14)$, com $x > 0$. No entanto as soluções "inteiras" do problema são apenas os pares

$$(1, 12),\ (2, 10),\ (3, 8),\ (4, 6),\ (5, 4) \text{ e } (6, 2).$$

Definição 4.1. *Uma equação do 1^o grau com duas incógnitas, x e y, é uma equação do tipo*

$$ax + by = c \tag{4.1}$$

onde $a,\ b$ e c são números conhecidos, sendo $a,\ b \neq 0$.

Uma equação do 1º grau com duas incógnitas tem um número infinito de soluções.

Definição 4.2. *Uma solução duma equação do 1º grau com duas incógnitas, é um par ordenado de números que substituídos na equação a transformam numa igualdade numérica verdadeira.*

Exemplo 4.3. *Considere a equação* $2x + y = 5$.

a) *Resolver a equação em ordem a* y : $2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 2x$.

b) *Resolver a equação em ordem a* x : $2x + y = 5 \Leftrightarrow 2x = y - 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{y}{2}$.

4.3 Sistemas de Equações

Considere o seguinte problema:

A diferença entre as idades de dois irmãos é de 10 anos e a soma é 34 anos. Qual é a idade de cada um dos irmãos?

Seja:

- y $\longrightarrow$ Idade do irmão mais velho,
- x $\longrightarrow$ Idade do irmão mais novo.

Atendendo aos dados do problema somos conduzidos às equações:

$$y - x = 10 \text{ e } y + x = 34.$$

Como as duas equações têm de ser verificadas simultaneamente, consideramos o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} y - x = 10 \\ y + x = 34 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& x + 10 \\ x + 10 + x &=& 34 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y &=& x + 10 \\ 2x &=& 34 - 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 12 + 10 \\ x = 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 22 \\ x = 12 \end{array} \right.$$

Vamos representar graficamente as duas equações obtidas:

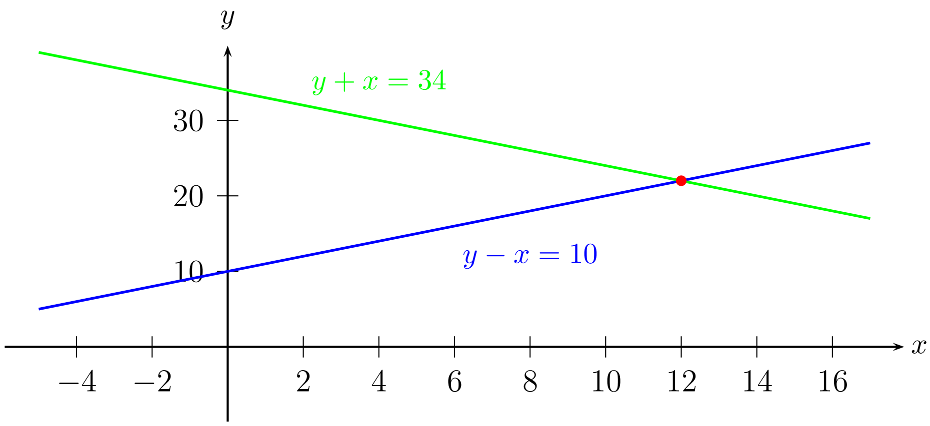


Figura 4.4: O par ordenado $(12, 22)$ é a solução do problema.

Definição 4.4. *Um par ordenado (x, y) é solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas, x e y, se for solução simultaneamente das duas equações.*

Exemplo 4.5. *Resolva o sistema* $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$ *usando o método de substituição.*

Resolução:

$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$ *Na 1^a equação o coeficiente de y é 1. Se resolvermos a 1^a equação em ordem a y não vão aparecer dominadores.*

$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 5(6 - 2x) = 22 \end{cases}$ *Na 2^a equação vamos substituir y pela expressão $6 - 2x$.*

$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 20 - 10x = 22 \end{cases}$ *A 2^a equação só tem uma incógnita. Vamos resolver esta equação em ordem a x.*

$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ -8x = -8 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6 - 2 \times 1 \\ x = 1 \end{cases}$ *Substituímos o valor de x na 1^a equação e determinamos y.*

$\begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$ *A solução do sistema é $(x, y) = (1, 4)$.*

4.4 Classificação de Sistemas

Na figura seguinte estão representadas graficamente as rectas cujas equações são:

$$y = -x + 3,\ y = -x,\ y = x - 3 \text{ e } 2y = -2x\ .$$

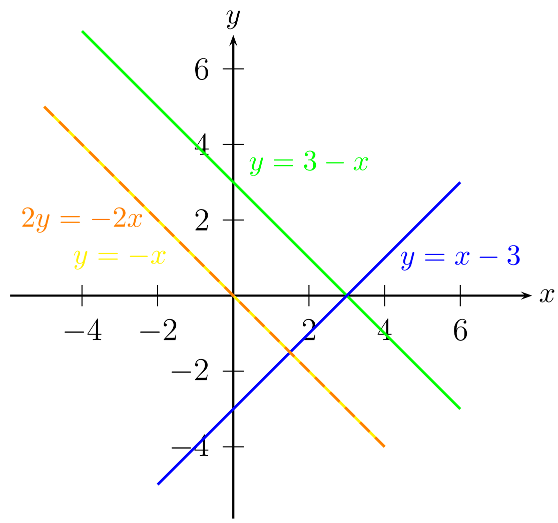


Figura 4.5: Classificação de sistemas.

4.4.1 Sistemas Impossíveis

Observando o gráfico verificamos que as rectas de equação $y = -x$ e $y = 3 - x$ são estritamente paralelas, isto é, não têm qualquer ponto comum.

$$\textbf{O sistema} \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = -x + 3 \end{array} \right. \textbf{é impossível.}$$

Verificação:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = -x + 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ -x & = & -x + 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & -x \\ 0x & = & 3 \end{array} \right.$$

Ora $0x = 3$ é uma equação impossível. Se num sistema uma equação é impossível, o sistema é impossível. O sistema não tem qualquer solução.

4.4.2 Sistemas Possíveis

Observando o gráfico podemos escrever os seguintes sistemas possíveis:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} \\ \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Solução: } \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 3 - x = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ -2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 3 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Solução: } (3, 0).$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 2y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow y = -x.$$

Os dois primeiros sistemas têm uma única solução, dizemos que são sistemas possíveis determinados. O ponto de intersecção das rectas tem como coordenadas a solução do sistema.

No último sistema as duas equações traduzem a mesma informação. Graficamente os gráficos das equações são paralelos coincidentes. O sistema tem uma infinidade de soluções. Todos os pontos da recta são soluções do sistema e o sistema diz-se **possível indeterminado**.

4.5 Exercícios

1. Marque, num referencial, os pontos $(3, 1)$, $(-2, -2)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $(-2, 0)$, $\left(1, -\sqrt{3}\right)$, $(0, -3)$.

2. Considere a equação $\dfrac{x - y}{2} = \dfrac{2(x - 3y)}{4} + 1$.

a) Resolva a equação em ordem a y.

b) Substitua na equação dada y por $x - 6$ e resolva a equação em ordem a x.

3. Prove que $\left(\dfrac{y + 1}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{4} \;\wedge\; 2x - 3y = \dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 4x - 6y = 3.$

4. Resolva e classifique cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} y = 3 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1 - \dfrac{x+y}{2} = 3 \\ \dfrac{1}{2}(x-3) = x + y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 - \dfrac{x-y}{4} = -\left(x + \dfrac{7}{4}\right) \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{1-y}{3} = x - y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+4}{2} \\ 1 + 2\left(\dfrac{x}{7} - 1\right) = \dfrac{2y}{3} - 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y = 2(x-y) + 3 \\ 5y = 3 + x \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y - \dfrac{3}{2} = x \\ 4x - 3(y+4) = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 4y = 2(y - 2x + 2) + 6 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} u + 3v = v - \dfrac{3u}{2} \\ \dfrac{1-v}{5} - 0,2 = \dfrac{u}{5} \end{cases}$

5. A diferença entre as idades de dois irmãos é de 10 anos e a soma 34 anos. Qual é a idade do mais velho?

6. O sêxtuplo da idade do Pedro excede em cinco anos a idade do António. Daqui a cinco anos a idade do António será tripla da do Pedro. Qual a idade de cada um?

7. A soma de dois números é 68. Se dividirmos um pelo outro obtemos quociente 12 e resto 3. Determine os números.

8. A diferença entre dois números é 16 e o dobro da diferença entre o maior e o triplo do menor é -24. Determine os números.

9. A Joana comprou uma saia e um par de sapatilhas. As sapatilhas custaram mais 15 euros do que a saia. Sabendo que ao todo gastou 40 euros, determine o custo das sapatilhas.

Capítulo 5

Equações do 2º Grau

Comecemos por relembrar que:

- Produto de polinómios: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Casos notáveis da multiplicação:
  - $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow$ Quadrado da soma.
  - $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow$ Quadrado da diferença.
  - $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow$ Diferença de quadrados.
- Lei do anulamento do produto: $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Factorização de polinómios consiste em escrever o polinómio sob a forma de um produto de factores. Para tal aplica-se a propriedade distributiva, procuram-se os factores comuns e põem-se em evidência.

5.1 Decomposição de Polinómios em Factores

Exemplo 5.1. *Simplificar a fracção* $\dfrac{8a+4b}{4}$.

Para a simplificação da fracção é útil escrever $8a+4b$ *como o seguinte produto de factores*

$$8a + 4b = \underbrace{4}_{1^o Factor} \times \underbrace{(2a+b)}_{2^o Factor} \Rightarrow \frac{8a+4b}{4} = \frac{4(2a+b)}{4} = 2a + b.$$

Exemplo 5.2. *Decompor em factores* $25x^2 - \dfrac{1}{16}$.

Temos que:

- $25x^2$ *é o quadrado de* $5x$,
- $\dfrac{1}{16}$ *é o quadrado de* $\dfrac{1}{4}$.

Então, $25x^2 - \dfrac{1}{16} = (5x)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ *é uma diferença de quadrados.*

Podemos aplicar o caso notável $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *e vem:*

$$25x^2 - \frac{1}{16} = \left(5x + \frac{1}{4}\right)\left(5x - \frac{1}{4}\right).$$

Exemplo 5.3. *Decompor em factores* $9x^2 + 12x + 4$.

Temos que:

- $8x^2$ *é o quadrado de* $9x$,
- 4 *é o quadrado de* 2,
- $12x = 2 \times 3x \times 2$.

Trata-se do quadrado duma soma, podemos aplicar o caso notável $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *e vem*

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2 = (3x+2)(3x+2).$$

Exemplo 5.4. *Resolução de uma equação:*

$(x-1)(2x+3)=-3$	*Reduzir o 2^o membro a zero;*
$(x-1)(2x+3)+3=0$	*Efectuar o produto de polinómios;*
$2x^2+3x-2x-3+3=0$	*Efectuar cálculos;*
$2x^2+x=0$	*Decompor em factores;*
$x(2x+1)=0$	*Aplicar a lei do anulamento do produto;*
$x=0 \vee 2x+1=0$	*Resolver as equações obtidas;*
$x=0 \vee \ x=-\dfrac{1}{2}$	*Apresentar a solução;*
$S=\left\{-\dfrac{1}{2},0\right\}$	*Apresentar o conjunto solução.*

Exemplo 5.5. *Resolução de uma equação:*

$(x-1)(x^2-9)=0$	*Aplicar a lei do anulamento do produto;*
$x-1=0 \vee \ x^2-9=0$	*Decompor em factores;*
$x-1=0 \vee (x-3)(x+3)=0$	*Aplicar a lei do anulamento do produto;*
$x-1=0 \vee \ x-3=0 \vee \ x+3=0$	*Resolver as equações obtidas;*
$x=1 \vee \ x=3 \vee \ x=-3$	*Apresentar a solução;*
$S=\{-3,1,3\}$	*Apresentar o conjunto solução.*

5.2 Equações do 2º Grau

Consideremos o seguinte problema:

Sabendo que a área de um quadrado é 64 m^2 *qual é o comprimento de cada lado?*

Traduzindo, o problema anterior, para linguagem matemática vem:

- $x \rightarrow$ comprimento de cada lado,
- $x^2 \rightarrow$ área do quadrado.

Então temos:

$$x^2 = 64. \tag{5.1}$$

Definição 5.6. *Chama-se* ***equação do*** 2^o ***grau em*** x *a toda a equação redutível à forma*

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0. \tag{5.2}$$

onde a, b *e* c *são números reais. Quando uma equação de* 2^o *grau se apresenta na forma (5.2) dizemos que está escrita na* ***forma canónica****.*
Se a equação tem nulo o termo independente e/ou o coeficiente do termo em x*, a equação do* 2^o *diz-se* ***incompleta****.*

Numa equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$, temos três termos:

- o termo em x^2 de coeficiente a,
- o termo em x de coeficiente b,
- o termo independente c.

Exemplo 5.7.

Equação do 2^o *Grau*	*Coeficiente do termo em* x^2	*Coeficiente do termo em* x	*Termo Independente*	*Completa Incompleta*
$3x^2 + x = 0$	3	1	0	*Incompleta*
$x^2 - 8 = 0$	1	0	-8	*Incompleta*
$x^2 = 0$	1	0	0	*Incompleta*
$3x^2 + 2x - 5 = 0$	3	2	-5	*Completa*

5.3 Resolução de Equações do 2º Grau

- Equação do tipo $ax^2 = 0$

  Se $a \neq 0$, temos de modo geral: $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  Uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = 0$ tem uma solução dupla: o número zero

- Equação do tipo $ax^2 + bx = 0$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx = 0 &\Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee ax = -b \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \left\{0,\ -\frac{b}{a}\right\} \end{aligned}$$

  Uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ tem sempre duas soluções reais, sendo uma delas nula e a outra igual ao simétrico do quociente entre b e a.

- Equação do tipo $ax^2 + c = 0$

  $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a}$

  Donde

  - Se $-\dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow$ a equação é impossível em $\mathbb{R}$.
  - Se $-\dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

  Uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$ tem sempre duas soluções simétricas se a e c têm sinais contrários e é impossível se a e b têm o mesmo sinal.

- Equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$

  As soluções da equação de 2º grau completa são dadas através da **fórmula resolvente**:
  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5.3}$$
  De um modo geral temos:

  - Se $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ a equação impossível em $\mathbb{R}$.
  - Se $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ a equação tem duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.
  - Se $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ a equação tem uma solução dupla: $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

Nota 5.8. *A fórmula resolvente pode aplicar-se a qualquer equação do 2º grau.*

Exemplo 5.9. *Resolva a equação $x^2 - 11x + 30 = 0$.*

Resolução:

- $x^2 - 11x + 30 = 0 \rightarrow$ *Equação de 2º grau completa*
- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$ *Fórmula resolvente*
- $a = 1$
- $b = -11$
- $c = 30$

Substituindo os valores de a, b e c na fórmula resolvente, vem:

$$\begin{aligned} x^2 - 11x + 30 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} \Leftrightarrow \ x = \frac{11 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{11 + 1}{2} \vee \ x = \frac{11 - 1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = 6 \vee x = 5 \end{aligned}$$

Logo o o conjunto solução da equação é $S = \{5, 6\}$.

Exemplo 5.10. *O custo médio mínimo da produção de x unidades de certo artigo ocorre quando o nível de produção é fixado na solução (positiva) de*

$$0,0003x^2 - 1200 = 0$$

Determine esse nível de produção.

Resolução: *Ora,*

$$0,0003x^2 - 1200 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0,0003x^2 = 1200 \Leftrightarrow x^2 = +\sqrt{\frac{1200}{0,0003}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2000$$

Logo o custo médio mínimo de produção ocorre quando são produzidas 2 000 *unidades do artigo x.*

Nota 5.11. *Repare que o problema indica que a solução da equação a considerar é a solução positiva, como não poderia deixar de ser.*

5.4 Exercícios

1. Complete:

a) $(x+1)^2 = x^2 +$ ...... $+1$;

b) $(x-1)^2 =$ ...... $-$ ...... $+$ ...... ;

c) $(x-3)^2 =$ ...... $+$ ...... $+$ 9 ;

d) $999^2 = (1000-1)^2 =$ ...... $-$ ...... $+$ 1 $=$ ....

2. A cada expressão da coluna da esquerda corresponde uma expressão equivalente na coluna da direita. Utilize uma seta para assinalar essa correspondência.

$x(x+3)$	•	•	$5(3x+4)$
$5x+10$	•	•	$5(x+2)$
$x+10x^2$	•	•	x^2+3x
$15x+20$	•	•	$8+40x$
$8(1+5x)$	•	•	$x(1+10x)$

3. Factorize os seguintes polinómios:

a) $3x^2 - 6x$ **b**) $x + x^2 + x^3$ **c**) $(2x+1)^2 - 1$ **d**) $3 + 6x + 9x^2$

4. Transforme num produto cada uma das expressões:

a) $(x+7) + 2(x+7)$ **b**) $2b^2 - b$ **c**) $16a^2 - \dfrac{49}{81}$

d) $9 - a^2$ **e**) $(7a+2)(8a+1) - 2(7a+2)^2$ **f**) $(2x+1)^2 - 1$

g) $25 - (36x+1)^2$ **h**) $(3x+1)^2 - (8x+4)^2$ **i**) $(5x+1)^2 - 16(x+3)^2$

a) $x^2 + 20x + 100$ **b**) $1 - 6x + 9x^2$ **c**) $\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{5}x + \dfrac{9}{25}$.

5. Calcule o trinómio que corresponde a cada quadrado do binómio

a) $(x+5)^2$ **b**) $(x-5)^2$ **c**) $(2x+8)^2$ **d**) $(2x-8)^2$

e) $\left(\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{3}\right)^2$ **f**) $\left(\dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{3}\right)^2$ **g**) $(-2a+5)^2$ **h**) $\left(-3a + \dfrac{1}{2}\right)^2$

i) $(-3a-3)^2$ **j**) $\left(-5x - \dfrac{1}{4}\right)^2$ **k**) $(-a-b)^2$; **l**) $(-x+y)^2$

6. Efectue os cálculos e simplifique.

a) $(2x+1)^2 - (3x+2)^2$ **b**) $\left(\dfrac{1}{2}a + 1\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}a + 3\right)^2$

c) $(b+1) + (2b+3)^2$ **d**) $(2a+1)^2 + (a+2) - 3(-a-1)^2$

7. Escreva como diferença de dois quadrados cada uma das expressões.

a) $\left(-5 - \dfrac{2}{3}x\right)\left(-5 + \dfrac{2}{3}x\right)$ **b**) $\left(-x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

c) $\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)$ **d**) $\left(a^2 - \dfrac{1}{2}b\right)\left(a^2 + \dfrac{1}{2}b\right)$

8. Efectue os cálculos e simplifique.

a) $(a-2)(a+2)-3(a-2)(a+3)$;

b) $\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(\frac{1}{3}-x\right)-2(x+1)^2$;

c) $(2x+1)^2-(x-3)(x+3)-(-8-x)^2$.

9. Dada a equação $(x-1)(x+2)=0$:

a) Justifique que pode aplicar a lei do anulamento do produto na resolução da equação.

b) Qual é o número que deve colocar no lugar de x de modo que $x-1$ seja zero? Qual é o número que deve colocar no lugar de x de modo que $x+2$ seja zero?

c) Identifique mentalmente as soluções da equação.

d) Resolva a equação aplicando a lei do anulamento do produto.

10. Resolva, aplicando a lei do anulamento do produto, cada uma das seguintes equações (antes de resolver, tente descobrir mentalmente as soluções).

a) $(x+1)(x-7)=0$ **b)** $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x+3)=0$ **c)** $x(x+3)=0$

d) $(2x+4)(3x-9)=0$ **e)** $-5(x+1)(x+3)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$

11. Verifique que, quaisquer que sejam x e y, se tem:

$$\left[\frac{1}{2}(x-y)(x+y)\right]^2=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}.$$

12. Resolva as seguintes equações:

a) $(x-5)(x+7)=0$ **b)** $x^2-6x+9=0$

c) $(2x+1)^2-(5x+1)^2=0$ **d)** $(x-3)(x+3)=16$

13. Escreva na forma canónica, e diga se se trata ou não de equações do 2º grau, completas ou incompletas, as seguintes equações:

a) $(x-1)^2 - 3(x+2)(x-2) = 0$ **b)** $(x-3)^2 - x^2 = 0$

14. Para cada uma das seguintes equações, determine $\Delta = b^2 - 4ac$ e diga quantas soluções tem a equação, sem as resolver:

a) $3x^2 - 6x + 8 = 0$ **b)** $25x^2 - 10x + 1 = 0$ **c)** $-x^2 + 7x + 1 = 0$

15. Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ **b)** $x^2 - x - 2 = 0$ **c)** $x^2 - 6x + 8 = 0$

d) $-x^2 - 6x - 9 = 0$ **e)** $3x^2 - 6 = 0$ **f)** $\frac{1}{2}x^2 = -5$

g) $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ **h)** $-\frac{1}{2}x^2 = x$ **j)** $x^2 + 3x - 70 = 0$

k) $x^2 = 5(-x+1)$ **l)** $\frac{x^2}{2} = -4(x+2)$ **m)** $x^2 - 10x + 22 = 0$

16. Na decomposição em factores de polinómios de três termos segue-se um dos seguintes processos:

- pôr em evidência os factores comuns;
- aplicar fórmula do quadrado do binómio;
- utilizar os dois processos anteriores associados.

Seguindo estas indicações, decomponha em factores:

a) $2 - 6ab - 8a^2b$ **b)** $\frac{1}{4}x^2 + 10x + 100$

c) $\frac{b^2}{4} - \frac{ab}{3} + \frac{a^2}{9}$ **d)** $y^3 + 2y^2 + y$

17. Considere as expressões: $A(x) = 3x^2 + 10x;\ B(x) = 16x^2 - 25;\ C(x) = x^2 + 2x + 1.$

a) Decomponha em factores $A(x),\ B(x)$ e $C(x)$.

b) Resolva as equações $A(x) = 0;\ B(x) = 0;\ C(x) = 0.$

18. Para cada uma das seguintes equações, transforme o primeiro membro num produto e, em seguida, aplique a lei do anulamento do produto para as resolver.

a) $3x^2 - \dfrac{16}{3}$ **b)** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9} = 0$

c) $(2x+1)^2 - (5x+1)^2 = 0$ **d)** $2x(x+5) - (x+5)^2 = 0$

19. O lucro P das vendas é dado por $P = -200x^2 + 2\ 000x - 3\ 800$, onde x é o número de unidades vendidas por dia (em centenas). Determine o intervalo para x tal que o lucro seja maior do que 1 000.

20. Decomponha os seguintes polinómios em factores do 1º grau.

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

b) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$

c) $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$, sabendo que admite a raiz $\frac{1}{2}$

d) $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$, sabendo que admite as raízes 1 e 2

Capítulo 6

Funções Reais de Variável Real

6.1 Generalidades Sobre Funções

Em muitas relações entre duas variáveis, o valor de uma delas depende do valor da outra. Por exemplo, o imposto sobre um produto depende do seu preço de venda.

A relação entre a área de um círculo e o seu raio pode ser expressa pela equação $A = \pi r^2$.

Nesta equação, o valor de A depende do valor escolhido para r. Por isto,

- A é a **variável dependente**,
- r é a **variável independente**.

Quase todas as relações que vamos estudar são tais que, a um dado valor da variável independente, corresponde um e só um valor da variável dependente. Tal relação chama--se função.

Definição 6.1. *Uma função é uma relação entre duas variáveis tal que, a cada valor da variável independente, corresponde exactamente um valor da variável dependente.*

O domínio duma função é o conjunto de todos os valores da variável independente para os quais a função é definida.

A imagem da função é o conjunto de todos os valores assumidos pela variável dependente.

Exemplo 6.2. *Equações que representam funções.*

Para decidir se uma equação define uma função, é conveniente isolar a variável dependente no membro esquerdo. Por exemplo, para decidir se a equação $x + y = 1$ define y como função de x, escrevemos a equação na forma

$$y = 1 - x$$

Com a equação nesta forma vemos que a qualquer valor de x corresponde exactamente um valor de y. Portanto, y é função de x.

Equação Original	*Forma Explícita*	*Teste: y é função de x*
$x + y = 1$	$y = 1 - x$	*Sim, cada valor de x define exactamente um valor de y*
$x^2 + y^2 = 1$	$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$	*Não, alguns valores de x definem dois valores de y*
$x^2 + y = 1$	$y = 1 - x^2$	*Sim, cada valor de x define exactamente um valor de y*
$x + y^2 = 1$	$y = \pm\sqrt{1 - x}$	*Não, alguns valores de x definem dois valores de y*

Nota 6.3. *As equações que atribuem dois valores ($\pm$) à variável dependente para um dado valor da variável independente não definem funções de x.*

Por exemplo, considerando a equação $x^2 + y^2 = 1$, quando $x = 0$, a equação $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ indica que $y = +1$ ou $y = -1$. Em baixo estão representados os gráficos das quatro equações.

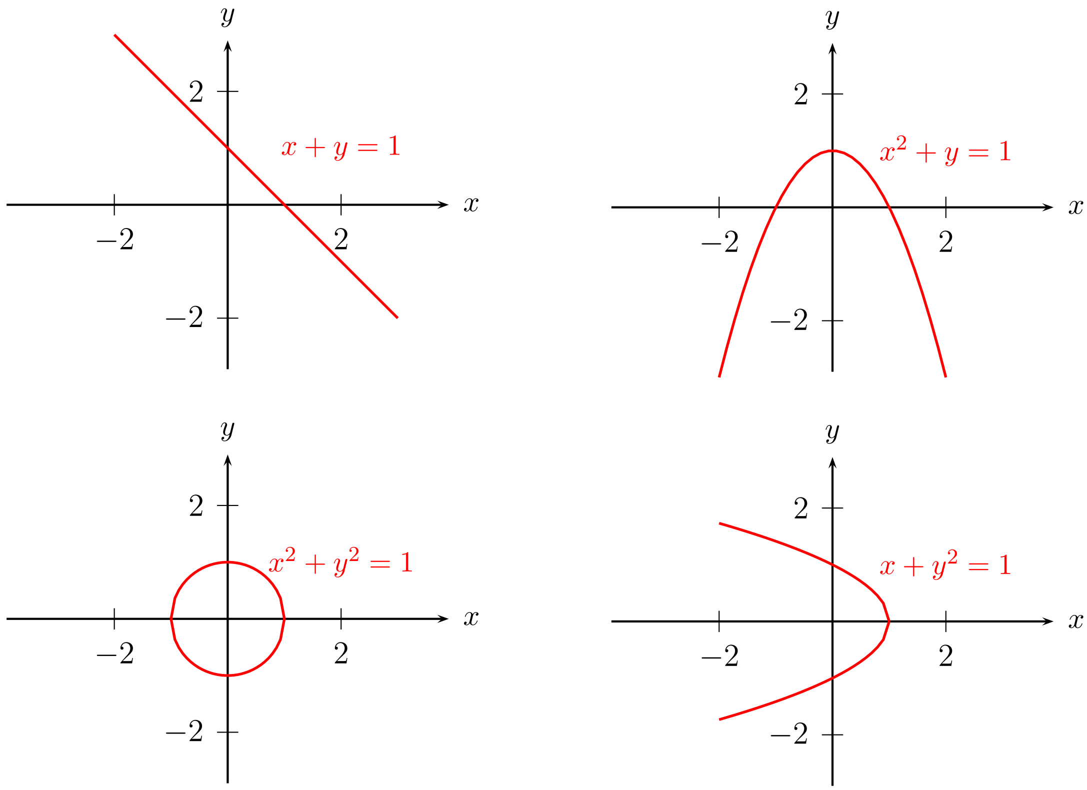


Figura 6.1: Representação gráfica de equações.

Ao definirmos uma função por uma equação, em geral isolamos a variável dependente no membro esquerdo.
Por exemplo, ao escrevermos a equação $x + 2y = 1$ como

$$y = \frac{1-x}{2} \tag{6.1}$$

estamos a indicar que y é a variável dependente.

Em **notação de função**, a equação (6.1) tem a forma

$$f(x) = \frac{1-x}{2}$$

A notação de função tem a vantagem de identificar claramente a variável dependente como $f(x)$ e, ao mesmo tempo, diz-nos que x é a variável independente e que a função é f.

O símbolo $f(x)$ é lido f de x.

Por outro lado, em vez de perguntarmos "Qual é o valor de y que corresponde a $x = 3$?", basta-nos perguntar "Quanto é $f(3)$?".

Na equação que define uma função, o papel da variável x é simplesmente de "guardadora de lugar". Por exemplo, a função dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1, \tag{6.2}$$

pode ser descrita na forma

$$f(\ \ ) = 2(\ \ )^2 - 4(\ \ ) + 1, \tag{6.3}$$

onde os parêntesis são usados em vez de x. Para calcular o valor de $f(-1)$, simplesmente coloca-se -1 em cada conjunto de parêntesis.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 1 = \\ &= 2 \times 1 + 4 + 1 = \\ &= 2 + 4 + 1 = 7 \end{aligned}$$

O valor $f(-1)$ é chamado um **valor da função**, e pertence à imagem de f. Isto significa que o ponto $(-1, 7)$ pertence ao gráfico de f.

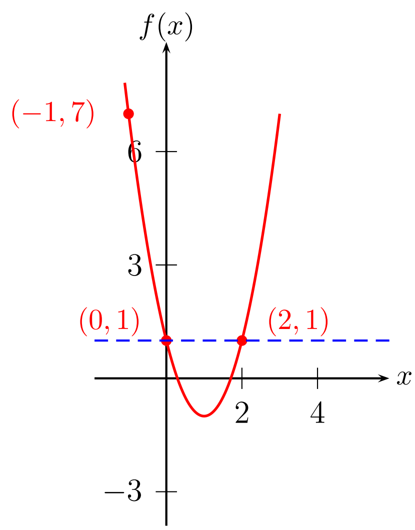


Figura 6.2: Representação gráfica da função $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

Nota 6.4. *Embora f seja frequentemente usada como um nome de função conveniente, e x como a variável independente, podem-se usar outros símbolos. Também é comum identificar $f(x)$ pela variável dependente y, como já foi dito anteriormente. Por exemplo, todas as equações abaixo definem a mesma função:*

- $f(x) = x^2 - 4x + 7 \rightarrow$ *A função é* f*, a variável independente é* x*.*

- $R(t) = t^2 - 4t + 7 \rightarrow$ *A função é* R*, a variável independente é* t*.*

- $C(s) = s^2 - 4s + 7 \rightarrow$ *A função é* C*, a variável independente é* s*.*

- $y = x^2 - 4x + 7 \rightarrow$ *A função está representada pela variável dependente* y*, a variável independente é* x*.*

- $C = t^2 - 4t + 7 \rightarrow$ *A função está representada pela variável dependente* C*, a variável independente é* t*.*

O domínio de uma função pode ser descrito explicitamente, mas também pode estar implícito na equação que define a função. Por exemplo, a função

$$y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

tem um domínio implícito, que consiste em todos os reais x diferentes de $x = \pm 2$. Estes valores estão excluídos do domínio porque a divisão por zero não é definida.

Outro tipo de domínio implícito é o que se usa para evitar raízes pares de números negativos.

Exemplo 6.5. *Calculemos analiticamente o domínio e contradomínio (imagem) das seguintes funções:*

a) $y = \sqrt{x - 1}$

- *Domínio*
  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} \Leftrightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \Leftrightarrow D_f = [1, +\infty)$.

- *Contradomínio*
  - $\sqrt{x - 1} \geq 0, \ \forall x \in D_f$
  - $\forall x \in D_f \Rightarrow y \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow D'_f = [0, +\infty)$

Graficamente

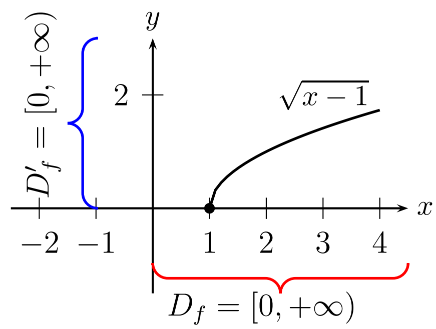


Figura 6.3: Domínio e contradomínio.

b) $y = \begin{cases} 1 - x, \ \ x < 1 \\ \\ \sqrt{x-1}, \ \ x \geq 1 \end{cases}$

- *Domínio*

  $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

  Repare que a função está definida para $x < 1$ e $x \geq 1$ (o segundo ramo da função foi estudado na alínea anterior).

- *Contradomínio*

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 1 \underset{a)}{\Rightarrow} D'_{x\geq 1}(f) = [0, +\infty) \\ \\ x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow D'_{x<1}(f) = (0, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow D'_f = [0, +\infty)$$

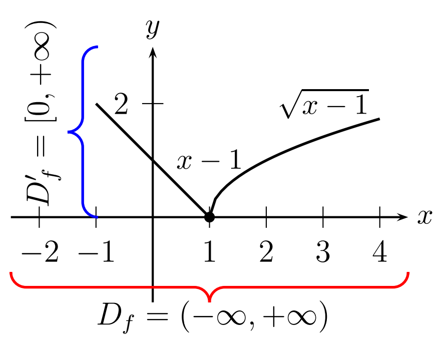


Figura 6.4: Domínio e contradomínio.

Observando o gráfico da figura 6.4 verificamos que existem objectos diferentes que têm a mesma imagem, contrariamente ao que se passa no gráfico representado na figura 6.3.

Definição 6.6. *Uma função f diz-se injectiva se e só se quaisquer que sejam x e y pertencentes ao domínio da função, se x é diferente de y implica que $f(x)$ é diferente de $f(y)$:*

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y), \ \forall x, y \in D_f \tag{6.4}$$

ou

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \ \forall x, y \in D_f \tag{6.5}$$

Graficamente, uma função f é injectiva se e só se nenhuma recta horizontal intersecta o seu gráfico em mais do que um ponto.

Uma função f é sobrejectiva quando o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

No exemplo 6.5 podemos constatar que a função definida na alínea a) é injectiva mas não sobrejectiva, enquanto que a função definida na alínea b) não é nem injectiva nem sobrejectiva.

Observando o gráfico da função representada graficamente na figura 6.3, concluímos que a função é crescente em todo o seu domínio enquanto que a função representada graficamente na figura 6.4 decresce para valores de $x < 1$ e cresce para valores de $x > 1$.

Definição 6.7. *Seja f uma função de domínio D.*

- *f é monótona crescente sse $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x2), \forall x_1, x_2 \in D$.*
- *f é monótona estritamente crescente sse $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x2), \forall x_1, x_2 \in D$.*
- *f é monótona decrescente sse $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x2), \forall x_1, x_2 \in D$.*
- *f é monótona estritamente decrescente sse $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D$.*

Tendo em conta a definição anterior concluimos que a função $y = \sqrt{x-1}$ é monótona crescente enquanto que a função $y = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$ não é monótona.

6.2 Gráfico de uma Função

Definição 6.8. *O gráfico da função $y = f(x)$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in D_f$.*

Ao traçar o gráfico de uma função, a convenção é representar a variável independente no eixo dos XX e a variável dependente no eixo dos YY.

Se observarmos a figura seguinte, concluímos que:

- $x =$ distância direccionada do eixo dos YY
- $f(x) =$ distância direccionada do eixo dos XX

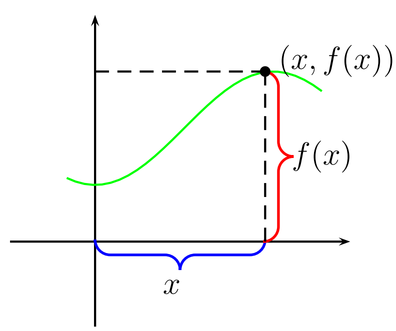


Figura 6.5: Gráfico da função f.

Adoptada a convenção acima referida podemos sempre, graficamente, saber se estamos ou não na presença do gráfico de uma função. Isto é, um gráfico no plano coordenado é o gráfico de uma função f se e só se nenhuma recta vertical intersecta o gráfico em mais de um ponto - **teste da recta vertical**.

Exemplo 6.9. *Aplique o teste da recta vertical para determinar se y é função de x nos casos seguintes:*

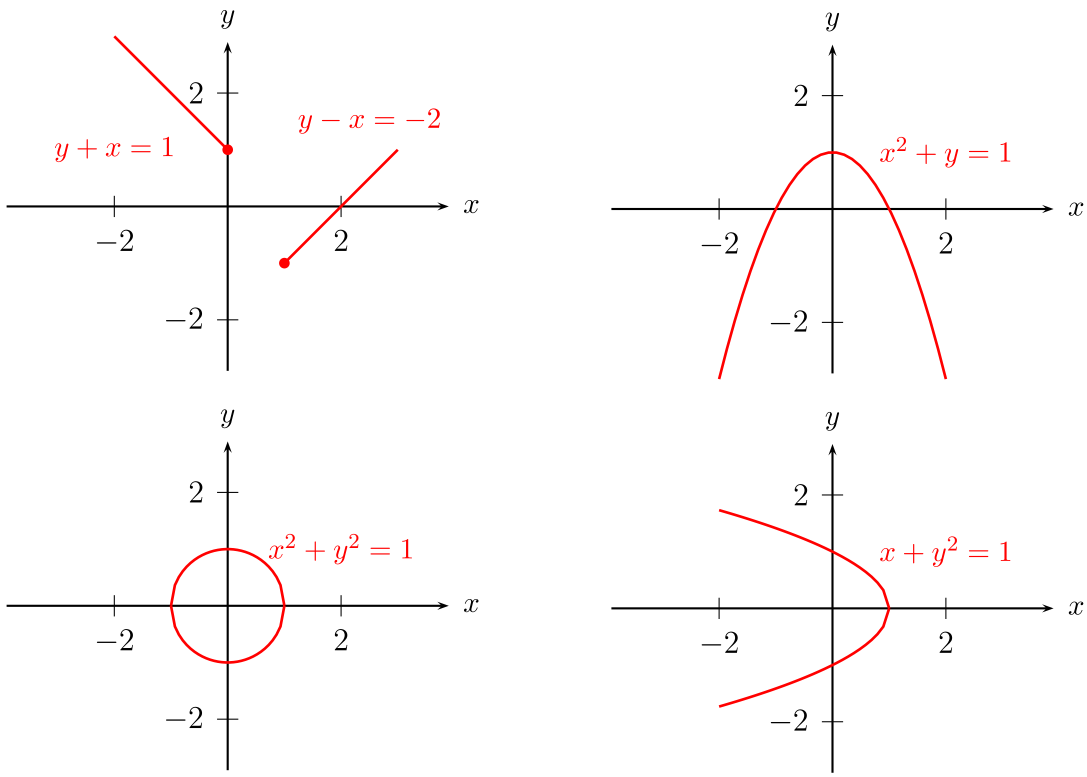


Figura 6.6: Teste da recta vertical.

6.3 Intersecções de um Gráfico

Duas categorias de pontos especialmente úteis para desenhar o gráfico de uma função são aqueles que possuem a coordenada x ou a coordenada y igual a zero. Tais pontos são chamados de pontos de intersecção com o eixo, porque são os pontos nos quais o gráfico intersecta o eixo dos XX ou dos YY.

O ponto $(a, 0)$ é uma intersecção do eixo dos XX com o gráfico de uma função e a é chamado um **zero da função**.

O ponto $(0, b)$ é uma intersecção do eixo dos YY com o gráfico de uma função e b é chamado **ordenada na origem**.

É possível que um gráfico não tenha intersecções com os eixos ou que tenha várias.

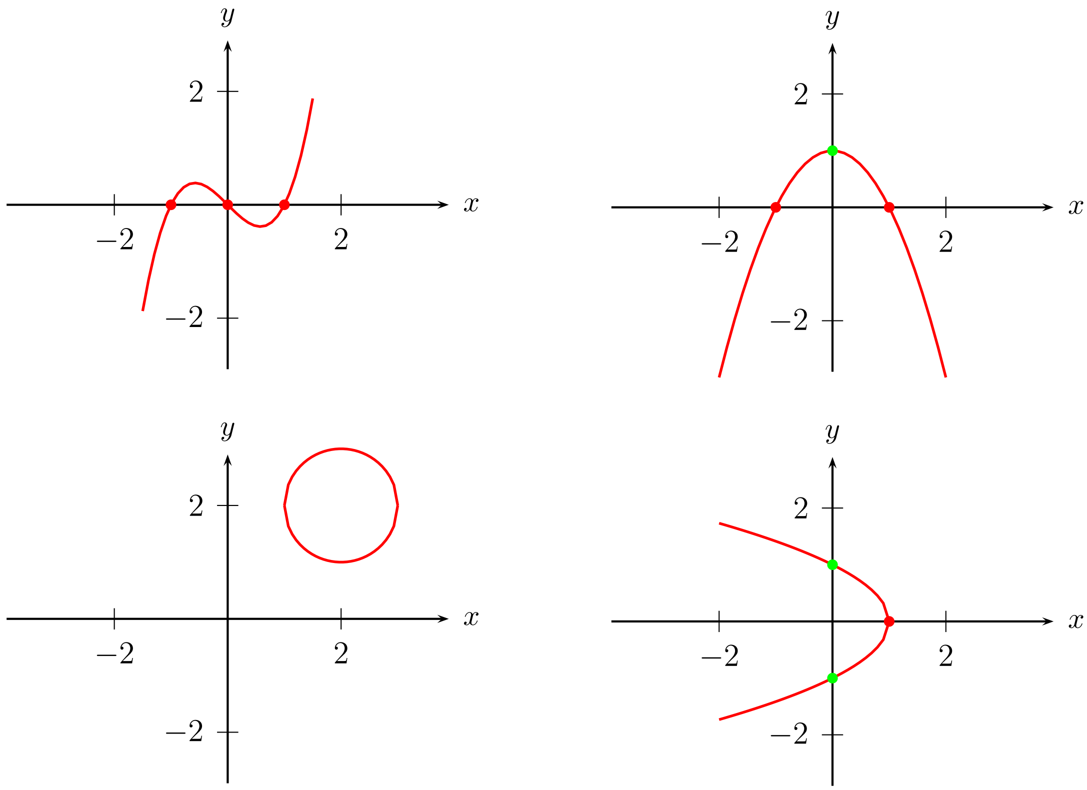


Figura 6.7: Intersecção com os eixos coordenados.

Exemplo 6.10. *Para calcularmos os pontos onde o gráfico da função* $y = x^2 - 3$ *intersecta os eixos dos* XX *e dos* YY*, determinamos quais são os pontos de abcissa nula e de ordenada nula.*

- *Intersecção com o eixo dos* XX

  $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$

  Logo os pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo dos XX *são os pontos de coordenadas* $(-\sqrt{3}, 0)$ *e* $(\sqrt{3}, 0)$.

- *Intersecção com o eixo dos* YY

  $x = 0 \Leftrightarrow y = -3 \Leftrightarrow y = -3$

  Logo o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo dos YY *é o ponto de coordenadas* $(0, -3)$.

6.4 Simetria de um Gráfico

Conhecer a simetria de um gráfico antes de traçá-lo é útil pois permite esboçar o gráfico com apenas metade dos pontos.

Definição 6.11.

- *Um gráfico é simétrico em relação ao eixo dos* YY *se, sempre que* (x, y)*é um ponto do gráfico da função, então* $(-x, y)$ *também o é. Isto significa que a parte do gráfico à esquerda do eixo dos* YY *é um reflexo da parte à direita do eixo dos* YY.

- *Um gráfico é simétrico em relação ao eixo dos* XX *se, sempre que* (x, y)*é um ponto do gráfico da função, então* $(x, -y)$ *também o é. Isto significa que a parte do gráfico acima do eixo dos* XX *é um reflexo da parte abaixo do eixo dos* XX.

- *Um gráfico é simétrico em relação à origem se, sempre que* (x, y)*é um ponto do gráfico da função, então* $(-x, -y)$ *também o é. Isto significa que o gráfico é invariante por uma rotação de* 180^o *ao redor da origem.*

Exemplo 6.12. *Consideremos a função* $x = f(y) = y^2 + 1$. *Vamos provar que o gráfico desta função é simétrico em relação ao eixo dos* XX. *Ora,*

$$\begin{array}{ll} x - y^2 = 1 & \textit{equação original} \\ x - (-y)^2 = 1 & \textit{substituindo } y \textit{ por } -y \\ x - y^2 = 1 & \textit{equação equivalente} \end{array}$$

Como as substituições geram uma equação equivalente, podemos concluir que o gráfico da função dada é simétrico em relação ao eixo dos XX.

Para traçarmos o gráfico, basta atendermos a que a parte abaixo do eixo dos XX *é uma imagem reflectida da parte acima do eixo dos* XX.

Marcamos os pontos de intersecção com o eixo dos XX *e os pontos acima do eixo dos* XX. *Finalmente traçamos a parte abaixo do eixo dos* XX *espelhando a parte já esboçada.*

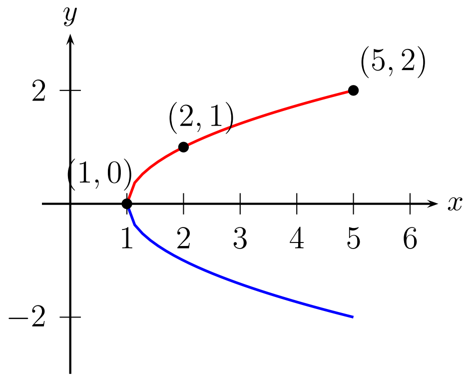


Figura 6.8: Gráfico duma função simétrica em relação ao eixo dos XX.

Exemplo 6.13. *Considere as funções f e g representadas graficamente na figura seguinte:*

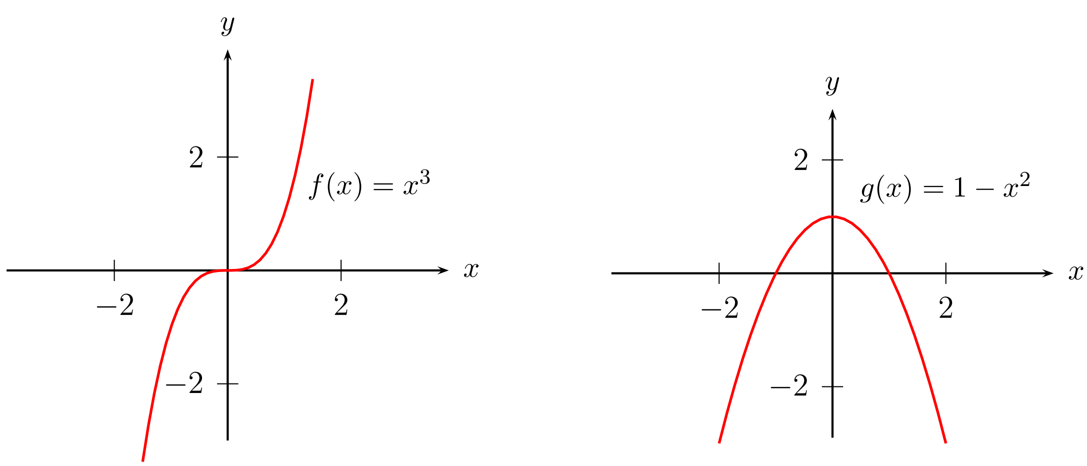


Figura 6.9: Gráfico duma função par e duma função ímpar.

Facilmente podemos verificar que $f(2) = -f(-2)$ *e* $g(2) = g(-2)$. *Vejamos:*

$f(2) = -f(-2)$	$g(2) = g(-2)$
$2^3 = -(-2)^3$	$1 - 2^2 = 1 - (-2)^2$
$8 = -(-8)$	$1 - 4 = 1 - 4$
$8 = 8$	$-3 = -3$

Consideremos o caso geral,

$$f(x) = -f(-x) \qquad\qquad g(x) = g(-x)$$

$$x^3 = -(-x)^3 \qquad\qquad 1 - x^2 = 1 - (-x)^2$$

$$x^3 = -(-x^3) \qquad\qquad 1 - x^2 = 1 - x^2$$

$$x^3 = x^3$$

Uma vez que estas igualdades se verificam para qualquer valor de x, dizemos que f é uma função ímpar e que g é uma função par.

Definição 6.14. *Seja f uma função de domínio D.*

- *f é par se e só se $f(x) = f(-x), \forall x \in D$.*
- *f ímpar se e só se $f(x) = -f(-x), \forall x \in D$.*

Nota 6.15. *Repare que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem e que o gráfico de uma função par é simétrico relativamente ao eixo dos YY.*

6.5 Transformações de Funções

Algumas famílias de gráficos têm a mesma forma básica.

Nas figuras seguintes cada um dos gráficos é uma transformação do gráfico da função $y = x^2$.

Os três tipos básicos de transformações ilustrados por estes gráficos são deslocamentos verticais, horizontais e reflexões.

Graficamente temos:

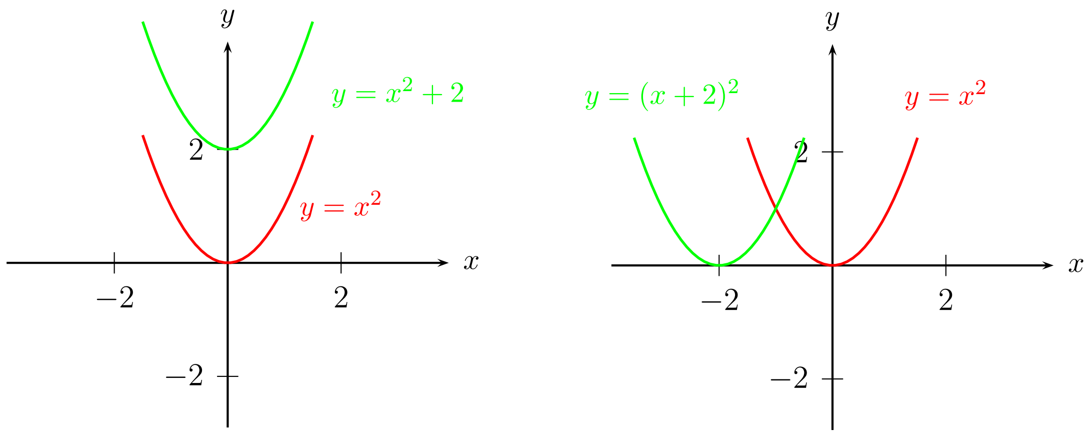


Figura 6.10: Deslocamento vertical para cima; Deslocamento horizontal para a esquerda.

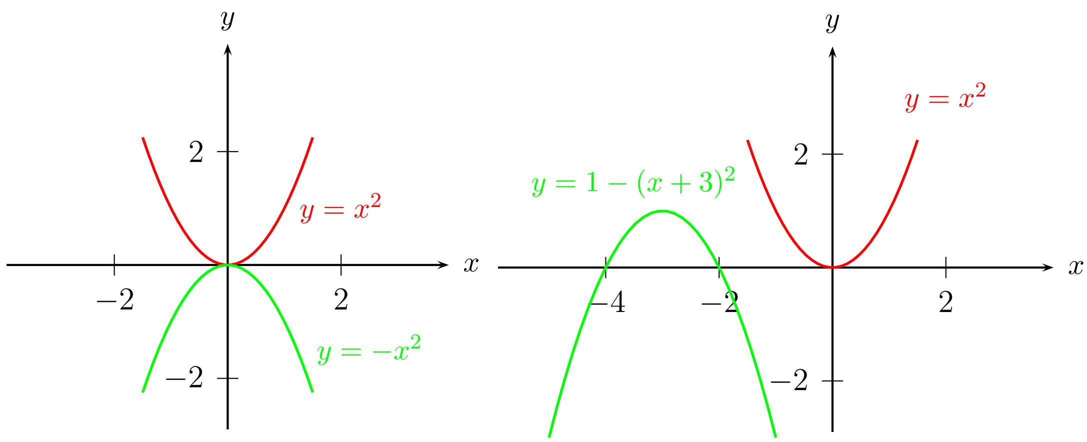


Figura 6.11: Reflexão; Deslocamento para a esquerda, reflexão e deslocamento para cima.

Considerando $f(x) = x^2$ como função original as transformações das figuras anteriores podem ser representadas pelas seguintes equações:

- $y = f(x) + 2 \longrightarrow$ deslocamento vertical de 2 unidades para cima,
- $y = f(x+2) \longrightarrow$ deslocamento horizontal de 2 unidades para a esquerda,
- $y = -f(x) \longrightarrow$ reflexão em torno do eixo dos XX,
- $y = -f(x+3) + 1 \longrightarrow$ deslocamento horizontal de 3 unidades para a esquerda, reflexão em torno do eixo dos XX deslocamento vertical de 1 unidade para cima.

Duma forma geral podemos concluir, para $c > 0$, que:

- Gráfico original: $y = f(x)$,
- deslocamento horizontal de c unidades para a direita: $y = f(x - c)$,
- deslocamento horizontal de c unidades para a esquerda: $y = f(x + c)$,
- deslocamento vertical de c unidades para baixo: $y = f(x) - c$,
- deslocamento vertical de c unidades para cima: $y = f(x) + c$,
- reflexão em torno do eixo dos XX: $y = -f(x)$,
- reflexão em torno do eixo dos YY: $y = f(-x)$,
- reflexão em torno da origem: $y = -f(-x)$.

6.6 Exercícios

1. Averigue se a equação define y como função de x:

a) $x^2 + y^2 = 4$ **b)** $3x - 2y + 5 = 0$ **c)** $x^2 + y = 4$ **d)** $x + y^2 = 4$

e) $y^2 = x^2 - 1$ **f)** $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ **g)** $x^2y - x^2 + 4y = 0$ **h)** $\frac{1}{2}x - 6y = -3$

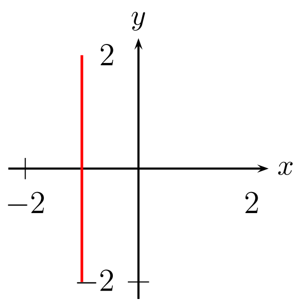
2. Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções:

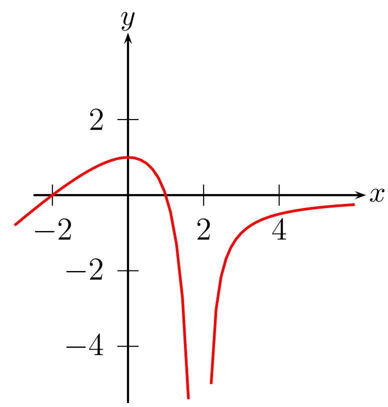
a) $y = x - 2$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **c)** $y = x^2 + 2x$ **d)** $y = \sqrt{9 - x^2}$ **e)** $y = |x| - 2$

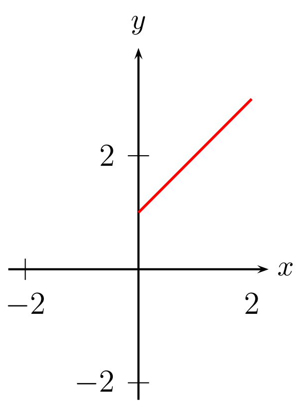
f) $y = x^3 - x$ **g)** $y = 4 - 2x$ **h)** $y = \frac{1}{|x|}$ **i)** $y = x^3$ **j)** $y = \sqrt{2x - 3}$

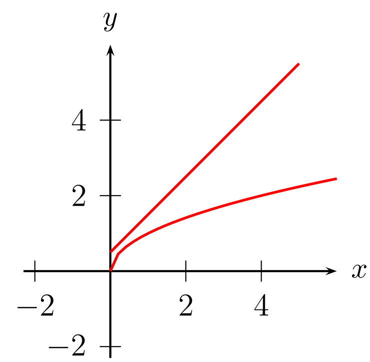
k) $y = |x - 2|$ **l)** $y = 4 - x^2$

3. Identifique os gráficos que representam funções:









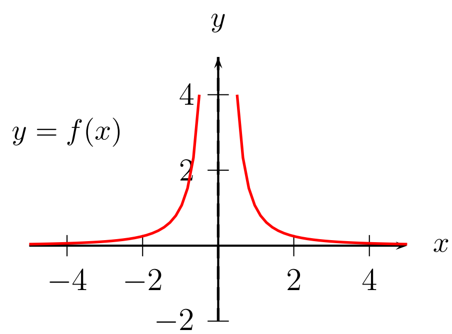
4. Calcule os seguintes valores da função $f(x) = x^2 + 7$:

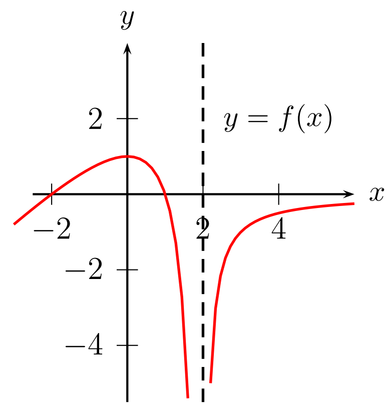
a) $f(0)$ **b)** $f(3a)$ **c)** $f(b-1)$ **d)** $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \Delta x \neq 0$

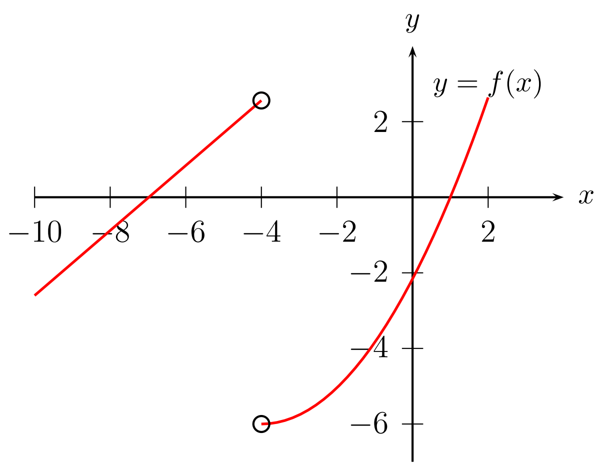
5. Calcule o valor da função nos casos indicados:

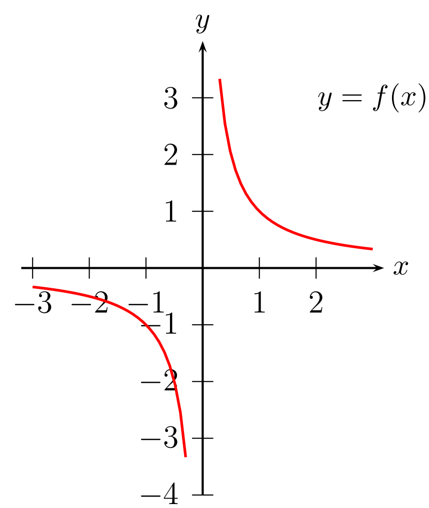
a) $f(x) = 2x - 3$	**b)** $f(x) = x^2 - 2x + 2$	**c)** $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$	**d)** $f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert}{x}x^2$
(i) $f(0)$	**(i)** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$	**(i)** $f(6)$	**(i)** $f(x-1)$
(ii) $f(x-1)$	**(ii)** $f(-1)$	**(ii)** $f(c)$	**(ii)** $f(x^2)$

7. A partir dos gráficos das seguintes funções, indique o seu domínio e contradomínio. Estude também a injectividade, sobrejectividade, bijectividade, paridade e monotonia.









7. Calcule, se possível, os pontos de intersecção do gráfico das funções seguintes com os eixos cartesianos:

a) $2x - y - 3 = 0$ **b)** $y = (x-1)(x-2)$ **c)** $y = x^2 + 4x - 2$ **d)** $y = x^2\sqrt{9 - x^2}$

e) $xy = 4$ **f)** $x - y^2 = 3$ **g)** $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ **h)** $\dfrac{x^2 + 3x}{(3x+1)^2}$

8. Averigue, analiticamente, se os gráficos das funções seguintes são simétricos ao eixo dos XX:

a) $f(x) = |x+1|$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$

9. Na sua máquina trace o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$. Sem utilizar a máquina, a partir do gráfico da função $y = \sqrt{x}$, trace o gráfico das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x} + 2$ **b)** $f(x) = \sqrt{x-2}$ **c)** $f(x) = -\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x+3}$

10. Na sua máquina trace o gráfico da função $y = x^3$. Sem utilizar a máquina, a partir do gráfico da função $y = x^3$, trace o gráfico das funções:

a) $y = x^3 - 3$ **b)** $y = (x-2)^3$ **c)** $y = (x-2)^3 - 3$ **d)** $y = (x+2)^3$

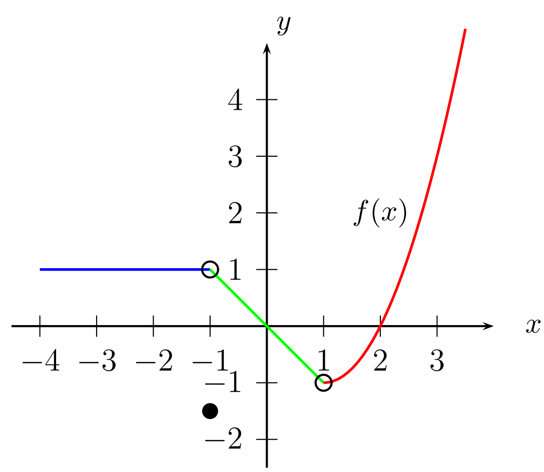
11. Considere a função $f(x) = 4x^3 - 7x + 1$.

a) Determine $f(-2)$, $f(0)$ e $f(2)$.

b) Determine, analiticamente, se a função é par ou ímpar.

c) A partir do gráfico da função, indique os intervalos de monotonia.

12. Considere o seguinte gráfico da função f.



a) Determine, caso existam, $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$.

b) Indique os intervalos de monotonia de f.

c) Classifique f quanto à injectividade.

13. Seja $d(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

    a) Prove que d é uma função ímpar.

    b) Através do gráfico da função, avalie a monotonia.

    c) Indique o contradomínio de d.

14. Faça um esboço de um gráfico que

    a) não seja função.

    b) seja uma função injectiva e negativa em $\mathbb{R}^-$, positiva em $]3, +\infty[$ e tenha um zero em $x = 1$.

    c) seja uma função crescente em $\mathbb{R}^-$, decrescente em $\mathbb{R}^+$ e que tenha um máximo em $x = 0$ cujo valor é 3.

    d) seja uma função crescente no intervalo $[1, 3]$, tal que a imagem do 2 seja 1, tenha domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[0, +\infty[$.

15. Seja $g(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ e $f(x) = x - 1$

    a) Determine os zeros da função g.

    b) Determine o domínio e o contradomínio da função $\dfrac{g}{f}$.

    c) Resolva $g(x) > f(x)$.

Capítulo 7

Função Afim e Função Quadrática

7.1 Classificação de Funções

Muitos fenómenos da vida real podem ser obtidos através de funções chamadas **funções elementares**. As funções elementares podem ser classificadas em:

1. Funções algébricas - polinomiais, radicais e racionais
2. Funções trigonométricas - seno, cosseno, tangente, etc
3. Funções exponenciais e logarítmicas

O tipo mais comum de função algébrica é a função polinomial que é uma função da forma:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0. \tag{7.1}$$

onde o inteiro positivo n é o **grau** da função polinomial. As constantes a_i, são os **coeficientes**, sendo a_0 o **coeficiente principal** e a_n o **termo independente** da função polinomial.

Exemplo 7.1.

Grau 0:	$f(x) = a$	*Função constante*
Grau 1:	$f(x) = ax + b$	*Função linear ou função afim*
Grau 2:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	*Função quadrática*
Grau 3:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	*Função cúbica*

7.2 Função Afim

As funções lineares ou funções afim são da forma

$$f(x) = ax + b, \;\; a \neq 0 \tag{7.2}$$

e são assim chamadas porque o seu gráfico é uma recta.

Fazendo $x = 0$ a recta intersecta o eixo dos YY em $y = b$, isto é, a intersecção do gráfico da função com o eixo dos YY é o ponto de coordenadas $(0, b)$.

A **inclinação**, **declive** ou **coeficiente angular**, da recta é

$$m = a \tag{7.3}$$

Esquematicamente temos:

$$\begin{array}{llcl} f(x) = & a\;x & + & b \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{Declive} & & \text{Intersecção com o eixo dos } YY \end{array}$$

Nota 7.2. *Como o gráfico das funções lineares são rectas é usual representar estas funções na forma $y = mx + b$.*

O **declive** de uma recta é o número de unidades que a recta se eleva (ou desce) verticalmente para cada unidade de variação horizontal da esquerda para a direita.

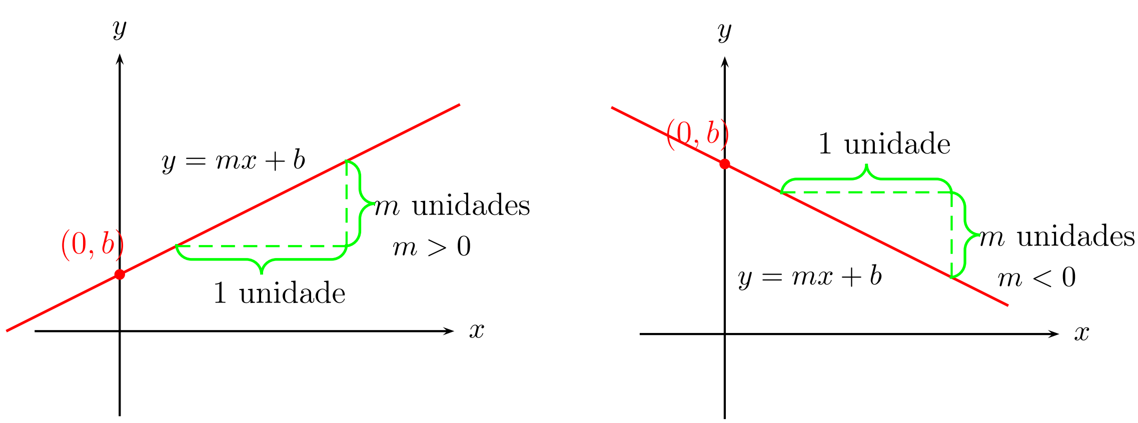


Figura 7.1: Deslocamento vertical para cima; Deslocamento horizontal para a esquerda.

Uma recta vertical tem uma equação da forma $x = a$. Tal equação não pode ser escrita na forma $y = mx + b$ pelo que o declive de uma recta vertical não é definido.

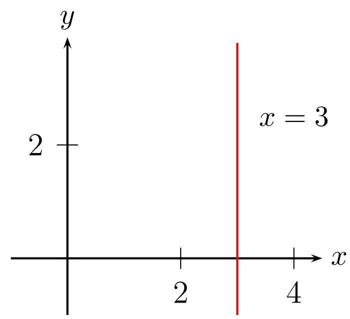


Figura 7.2: Declive positivo $\Rightarrow$ recta sobe; declive negativo $\Rightarrow$ recta desce.

Uma vez determinados o declive e a intersecção do gráfico da função com o eixo dos YY, é relativamente fácil traçar o gráfico da função.

Exemplo 7.3. *Esboce o gráfico das seguintes funções lineares:*

Resolução:

a) $y = 2x + 1$

- $b = 1 \Longrightarrow$ *intersecção do gráfico da função com o eixo dos* YY *é o ponto* $(0, 1)$
- $m = 2 \Longrightarrow$ *recta eleva-se duas unidades para cada unidade que se desloca para a direita*

b) $y = 2 \Longleftrightarrow y = 0x + 2$

- $b = 2 \Longrightarrow$ *intersecção do gráfico da função com o eixo dos* YY *é o ponto* $(0, 2)$
- $m = 0 \Longrightarrow$ *recta nem se eleva nem desce, logo a recta é horizontal*

c) *Ora,* $x + y = 2 \Longleftrightarrow y = -x + 2 \Longleftrightarrow y = (-1)x + 2$

- $b = 2 \Longrightarrow$ *intersecção do gráfico da função com o eixo dos* YY *é o ponto* $(0, 2)$
- $m = -1 \Longrightarrow$ *recta desce uma unidade para cada unidade que se desloca para a direita*

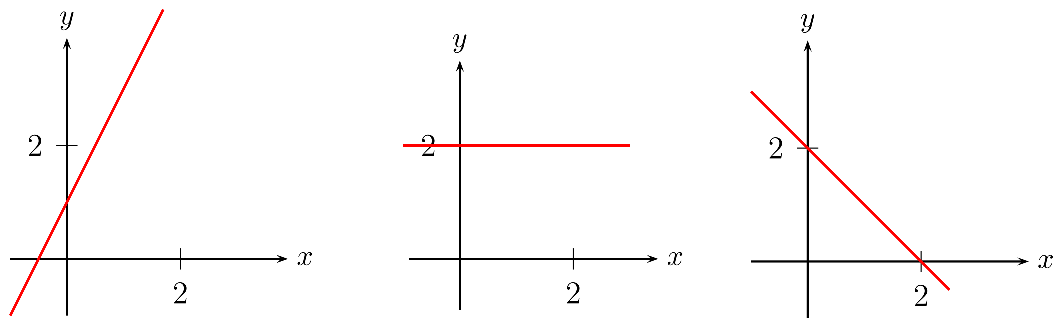


Figura 7.3: Representação gráfica de funções afim.

Definição 7.4. *O declive* m *de uma função linear que passa pelos pontos* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *é*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ x_1 \neq x_2. \tag{7.4}$$

Se (x_1, y_1) *é um ponto de uma função linear de declive* m *e* (x, y) *é um ponto arbitrário da mesma função, então*

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \ x \neq x_1. \tag{7.5}$$

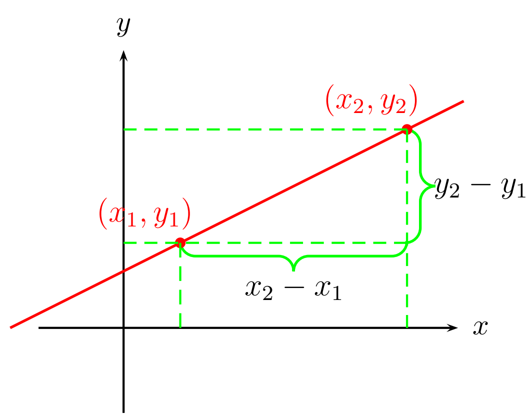


Figura 7.4: Declive da função f.

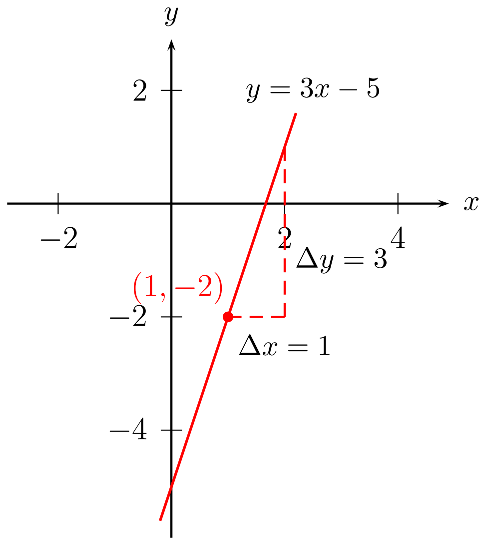


Figura 7.5: Declive da função $y = 3x - 5$.

Nota 7.5.

- *Duas rectas distintas não verticais,* $y_1 = m_1 x + b_1$ *e* $y_2 = m_2 x + b_2$*, são paralelas se e só se têm o mesmo declive:* $m_1 = m_2$
- *Duas rectas distintas não verticais,* $y_1 = m_1 x + b_1$ *e* $y_2 = m_2 x + b_2$*, são perpendiculares se e só se os seus declives são inversos simétricos um do outro:* $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

Em problemas da vida real, o declive de uma recta pode ser interpretado como uma razão ou como uma taxa.

- Se o eixo dos XX e o eixo dos YY têm a mesma unidade de medida, então o declive é uma **razão**.
- Se o eixo dos XX e o eixo dos YY têm unidades diferentes, então o declive da recta é uma **taxa**, ou uma **taxa de variação**.

Exemplo 7.6. *O fluxo de caixa por acção numa empresa foi de* $2,38$ *euros em* 1988 *e* $2,80$ *em* 1989*. Utilizando apenas esta informação, vejamos como estabelecer uma função linear que dê o fluxo de caixa por acção em função do ano.*

Associando t ao ano, podemos fazer:

$$1988 \Rightarrow t = 0 \;\wedge\; 1989 \Rightarrow t = 1$$

Desta forma os dois valores dados são representados pelos pares ordenados $(0; 2,38)$ *e (1; 2,8). O declive da recta que passa por estes dois pontos pode ser calculado usando a fórmula (7.4). Vem:*

$$m = \frac{2,8 - 2,38}{1 - 0} = 0,42$$

Na posse destes dados, e atendendo à fórmula (7.2) podemos relacionar o fluxo de caixa C e o ano correspondente a partir da função

$$C = 0,42t + 2,38$$

Podemos analisar graficamente a função $C = 0,42t + 2,38$*:*

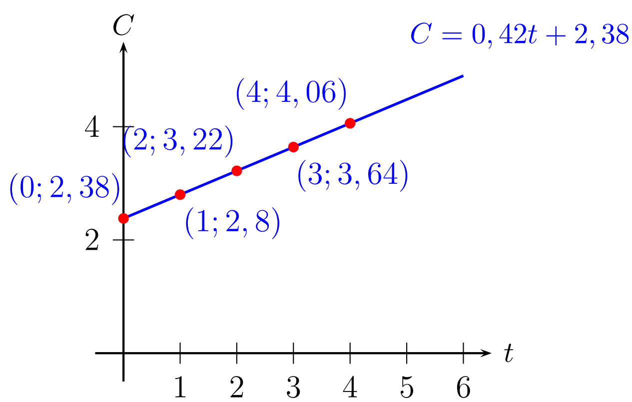


Figura 7.6: Caixa/acção em função do tempo.

7.3 Função Quadrática

As funções quadráticas são da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0. \tag{7.6}$$

O gráfico destas funções são parábolas.

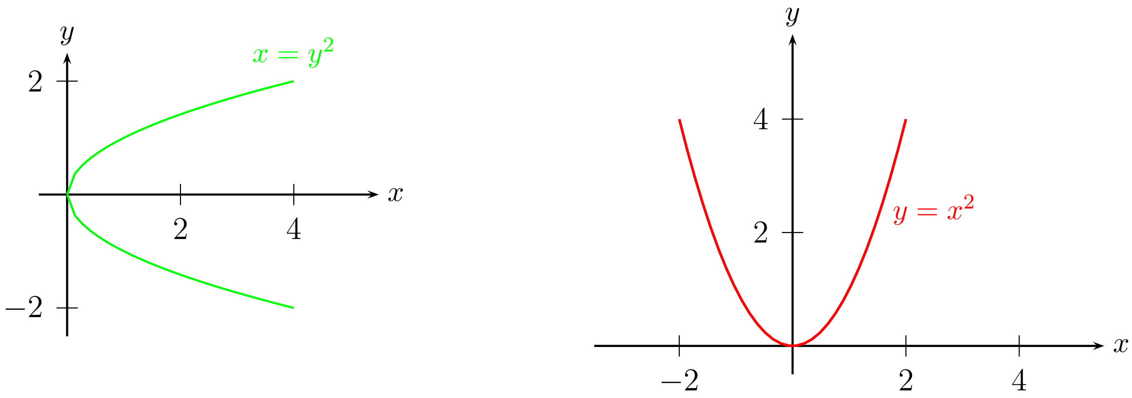


Figura 7.7: O gráfico de funções quadráticas são parábolas.

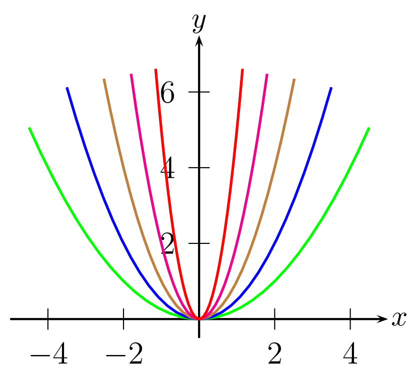


Figura 7.8: Parábolas.

O gráfico de uma função quadrática é fácil de esboçar se atendermos às seguintes propriedades:

Função quadrática: $f(x) = ax^2 + by + c, a \neq 0$

- Concavidade:

$$\begin{array}{ll} \text{Se } a < 0 \Longrightarrow & \text{concavidade voltada para baixo} \\ \text{Se } a > 0 \Longrightarrow & \text{concavidade voltada para cima} \end{array}$$

- Zeros: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\begin{array}{ll} \text{Se } b^2 - 4ac > 0 & f(x) \Rightarrow \text{tem dois zeros reais distintos} \\ \text{Se } b^2 - 4ac = 0 & f(x) \Rightarrow \text{tem um zero real duplo} \\ \text{Se } b^2 - 4ac < 0 & f(x) \Rightarrow \text{não tem zeros reais} \end{array}$$

- Vértice: $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

- Eixo de Simetria: $x = -\dfrac{b}{2a}$

- Sinal:

$$\begin{array}{ll}
\text{Se } b^2-4ac>0 \Rightarrow f(x) & \text{tem sinal contrário ao de } a \text{ no} \\
& \text{intervalo dos zeros e sinal igual} \\
& \text{de } a \text{ fora do intervalo dos zeros} \\
\text{Se } b^2-4ac=0 \Rightarrow f(x) & \text{tem o sinal de } a \text{ excepto no zero} \\
\text{Se } b^2-4ac<0 \Rightarrow f(x) & \text{tem sempre o sinal de } a
\end{array}$$

Exemplo 7.7. *Atendendo a que a função $f(x) = -(x+1)^2+1$ é uma função quadrática o seu gráfico é uma parábola. Para esboçarmos o gráfico da função comecemos por escrever a função na forma canónica:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= -(x+1)^2+1 = -(x^2+2x+1)+1 = \\
&= -x^2-2x-1+1 = -x^2-2x
\end{aligned}$$

Então temos:

- *Zeros:* $-x^2-2x=0 \Leftrightarrow -x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$,

- *Concavidade: Como $a=-1$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo*

- *Vértice:* $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\dfrac{-2}{-2}, f\left(-\dfrac{-2}{-2}\right)\right) = (-1,1).$

Logo

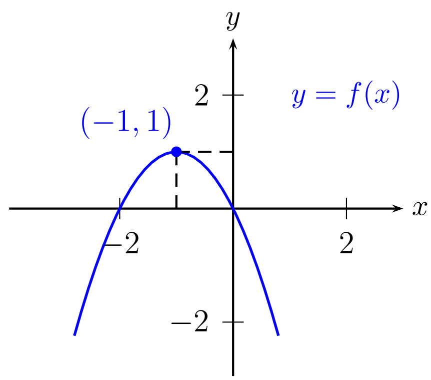


Figura 7.9: Gráfico da função $f(x) = -(x+1)^2 + 1$.

Como já dissemos, qualquer função quadrática, graficamente, é uma parábola. Obviamente que a expressão da função pode não estar na forma canónica.

Se a expressão que define a função quadrática $f(x)$ é da forma:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k. \tag{7.7}$$

podemos afirmar que o vértice da parábola é o ponto de coordenadas (h, k).

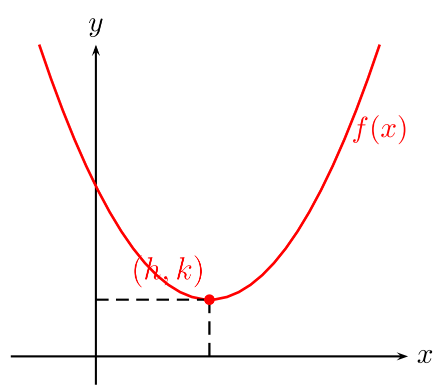


Figura 7.10: Gráfico da função $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Exemplo 7.8. *Através da fórmula (7.7) podemos indicar as coordenadas do vértice da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.*

Basta atender a que

$$a(x-h)^2 + k = a(x^2 - 2xh - h^2) + k = ax^2 - 2axh + ah^2 + k$$

vem

$$a = 1 \wedge (-2ah = -2 \Longrightarrow h = 1) \wedge (ah^2 + k = -3 \Longrightarrow k = -4)$$

donde

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \Longrightarrow V(1, -4)$$

7.4 Combinação de Funções

Duas funções podem combinar-se de várias maneiras, originando novas funções.

Por exemplo, considerando

$$f(x) = 2x - 3 \text{ e } g(x) = x^2 + 1$$

podemos formar as funções

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x-3) + (x^2+1) = x^2 + 2x - 2$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+1) = -x^2 - 2x + 2$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x-3) \times (x^2+1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{x^2+1}$$

Há ainda outra maneira de combinar duas funções, chamada **composição**. A função resultante é uma **função composta**.

Definição 7.9. *Sejam f e g funções reais de variável real. A função dada por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \tag{7.8}$$

chama-se ***função composta*** *de f com g.*

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tais que $g(x)$ está no domínio de f.

Esquematicamente temos:

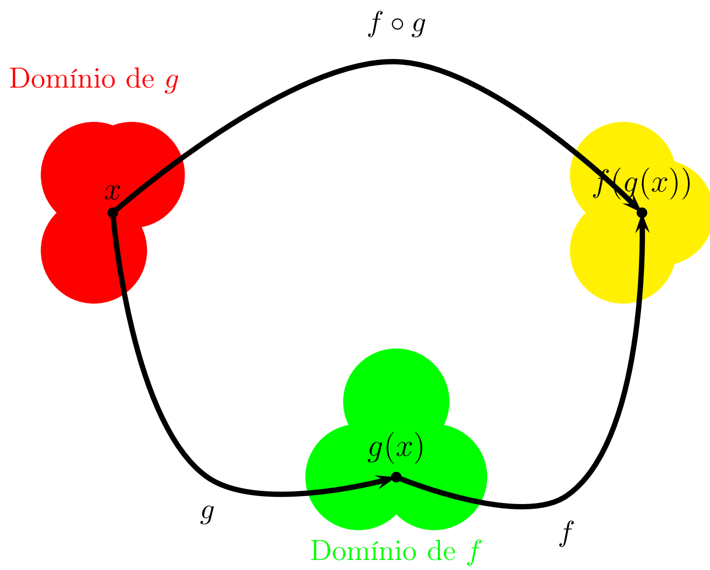


Figura 7.11: Função composta $(f \circ g)(x)$.

Nota 7.10. *Obviamente que a composta de f com g não é, em geral, igual à composta de g com f.*

Exemplo 7.11. *Para $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x^2 + 1$, temos:*

$$\begin{array}{rcll} (f \circ g)(x) = f[g(x)] & = & 2 \times [g(x)] - 3 = & \textit{Calcular } f \textit{ em } g(x) \\ & = & 2 \times (x^2 + 1) - 3 = & \textit{Substituir } g(x) \textit{ por } x^2 + 1 \\ & = & 2x^2 - 1 & \textit{Simplificar} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} (g \circ f)(x) = g[f(x)] & = & [f(x)]^2 + 1 = & \textit{Calcular } g \textit{ em } f(x) \\ & = & (2x - 3)^2 + 1 = & \textit{Substituir } f(x) \textit{ por } 2x - 3 \\ & = & 4x^2 - 12x + 10 & \textit{Simplificar} \end{array}$$

7.5 Função Inversa

Informalmente, a inversa de uma função f é outra função g que "desfaz" o que f fez.

Definição 7.12. *As funções f e g são inversas uma da outra se*

- $f[g(x)] = x$ *para cada x no domínio de g*
- $g[f(x)] = x$ *para cada x no domínio de f.*

*A função g representa-se por f^{-1} e lê-se "**inversa** de f". Para que f e g sejam inversas uma da outra, o contradomínio de g deve ser igual ao domínio de f, e vice-versa.*

Nota 7.13. *Os gráficos de f e f^{-1} são reflexões um do outro (em relação à recta $y = x$).*

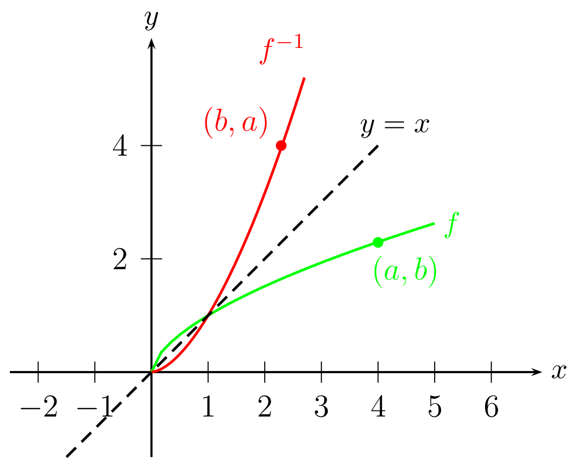


Figura 7.12: Representação gráfica da função f e da sua inversa.

Seguidamente apresentam-se várias funções e as respectivas inversas. Em cada caso, podemos observar que a função inversa "desfaz" a função original.

	`Função`	`Função Inversa`
a)	$f(x) = 2x$	$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$
b)	$f(x) = \frac{1}{3}x$	$f(x) = 3x$
c)	$f(x) = x + 4$	$f^{-1}(x) = x - 4$
d)	$f(x) = 2x - 5$	$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$
e)	$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
f)	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

Calcular as funções inversas do exemplo anterior é muito simples. Nem sempre é assim como iremos ver.

Exemplo 7.14. *Para calcular a inversa da função $f(x) = \sqrt{2x-3}$ comecemos por substituir $f(x)$ por y para de seguida resolvermos a equação em ordem a x.*

$f(x) = \sqrt{2x-3}$	$\Leftrightarrow$	$y = \sqrt{2x-3}$	*Substituímos $f(x)$ por y*
	$\Leftrightarrow$	$x = \sqrt{2y-3}$	*Permutamos x e y*
	$\Rightarrow$	$x^2 + 3 = 2y$	*Somamos 3 a ambos os membros*
	$\Leftrightarrow$	$\frac{x^2+3}{2} = y$	*Dividimos ambos os membros por 2*
	$\Leftrightarrow$	$y = \frac{x^2+3}{2}$	*Colocamos a variável dependente no 1^o membro.*

A expressão que define a função inversa é

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}, \qquad x \geq 0$$

Graficamente, temos:

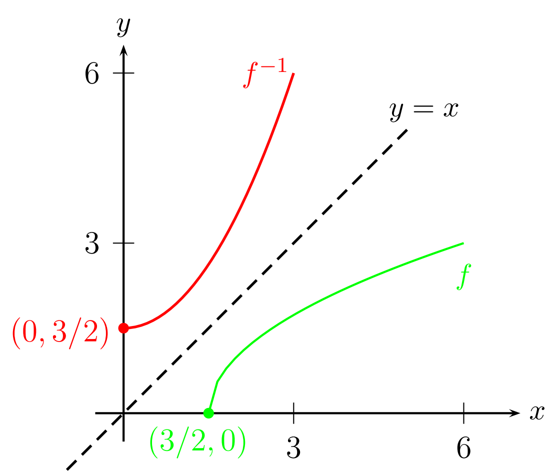


Figura 7.13: Representação gráfica da função $f(x) = \sqrt{2x-3}$ e da sua inversa.

Note-se que o domínio de f^{-1} coincide com o contradomínio de f.

Após achar a inversa de uma função, é conveniente verificar os resultados, o que se pode fazer graficamente, observando que os gráficos de f e f^{-1} devem ser a reflexão um do outro em relação à recta $y = x$.

Algebricamente, podemos fazer esta verificação calculando $f\left[f^{-1}(x)\right]$ e $f^{-1}\left[f(x)\right]$ observando que ambas devem ser iguais a x.

No nosso caso vem

$$\begin{aligned}
f\left[f^{-1}(x)\right] &= f\left(\frac{x^2+3}{2}\right) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right) - 3} = \\
&= \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left[f(x)\right] &= f^{-1}\left(\sqrt{2x-3}\right) = \frac{\sqrt{(2x-3)^2}+3}{2} = \\
&= \frac{2x}{2} = x, \quad x \geq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Nota 7.15. *Nem toda a função possui inversa. Na verdade, para que uma função tenha uma inversa, ela deve ser injectiva.*

Exemplo 7.16. *Vejamos que a função $f(x) = x^2 - 1$ não tem inversa começando por esboçar o gráfico de f*

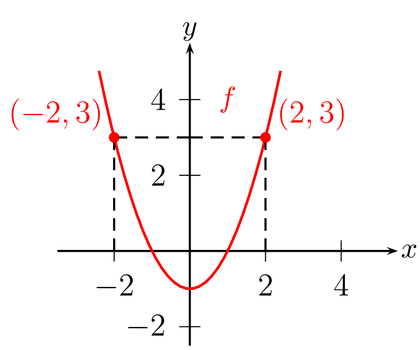


Figura 7.14: Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 1$ não tem inversa.

Da análise do gráfico podemos verificar que

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3 \ e \ f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$$

Assim sendo, f não passa no teste da recta horizontal, o que implica que f não é uma função injectiva e, deste modo, não tem inversa.

Podemos chegar à mesma conclusão procurando calcular a inversa de f.

$$\begin{array}{rcll}
f(x) = x^2 - 1 & \Leftrightarrow & y = x^2 - 1 & \textit{Substituindo } f(x) \textit{ por } y \\
& \Leftrightarrow & x = y^2 - 1 & \textit{Permutando } x \textit{ e } y \\
& \Leftrightarrow & x + 1 = y^2 & \textit{Somando 1 a ambos os membros} \\
& \Leftrightarrow & \pm\sqrt{x+1} = y & \textit{Calculando a raiz quadrada de ambos os membros} \\
& \Leftrightarrow & y = \pm\sqrt{x+1} & \textit{Colocando a variável dependente no } 1^o \textit{ membro.}
\end{array}$$

Como já vimos anteriormente a última equação não define y como função de x, e, assim, f não tem inversa.

7.6 Exercícios

1. Calcule, quando possível, $f(x) + g(x)$, $f(x) \times g(x)$, $f(x)/g(x)$, $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$:

a) $f(x) = x + 1$; $\quad g(x) = x - 1$ **b)** $f(x) = x^2 + 5$; $\quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; $\quad g(x) = x^3$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = 2x^2$; $\quad g(x) = x^2 - 1$

2. Trace o gráfico das seguintes funções lineares:

a) $f(x) = 3x + 1$; **b**) $f(x) = 2 - 5x$; **c**) $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{4}$

d) $f(x) = -x$; **e**) $f(x) = 3$; **f**) $f(x) = \dfrac{-2x}{3} - 1$

g) $f(x) = -2x + 1$; **h**) $f(x) = -1$; **i**) $f(x) = x - 1$

j) $f(x) = 2x - 1$; **k**) $g(x) = -3x + 3$; **l**) $h(x) = x - \dfrac{1}{2}$

3. Represente graficamente as funções afins: $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x - 2$ e $i(x) = x + 3$. Todas elas são do tipo $x + b$. Qual a influência do parâmetro b?

4. Qual dos seguintes gráficos passa pelo ponto B de coordenadas $(2, -1)$?
$f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x - 5$, $h(x) = -3x + 5$, $i(x) = -x + 1$

5. Resolva graficamente as equações:
a) $2x + 1 = 3$; **b**) $3x - 2 = x + 1$; **c**) $-x + 5 = x - 1$; **d**) $5x - 4 = 2$

6. Resolva, graficamente, as seguintes inequações:
a) $x + 1 \geq -2$; **b**) $2x - 1 \leq -x + 1$; **c**) $-x + 3 < 1$; **d**) $-2x - 1 > 0$

7. Trace o gráfico das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 2x$; **b**) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; **c**) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

d) $f(x) = -x^2 - 4$; **e**) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$; **f**) $f(x) = -(x + 3)^2 - 2$

g) $f(x) = x^2 + 9$; **h**) $f(x) = 3x^2$; **i**) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

8. Represente graficamente as funções quadráticas:

$$f(x) = x^2,\ g(x) = -2x^2,\ h(x) = -\frac{1}{3}x^2 \text{ e } i(x) = 3x^2.$$

Todas elas são do tipo ax^2. Qual a influência do parâmetro a?

9. Represente graficamente as funções quadráticas:

$$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^2 - 1,\ h(x) = x^2 - 2 \text{ e } i(x) = x^2 + 3.$$

Todas elas são do tipo $x^2 + y_0$. Qual a influência do parâmetro y_0?

10. Represente graficamente as funções quadráticas:

$$f(x) = (x+1)^2,\ g(x) = (x-1)^2,\ h(x) = (x-2)^2 \text{ e } i(x) = (x+5)^2.$$

Todas elas são do tipo $(x - x_0)^2$.

Qual a influência do parâmetro x_0?

11. O vértice é o extremo de uma função quadrática. Quais as suas coordenadas?

12. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & se \quad x \leq -1 \\ x - 1 & se \quad -1 < x \geq 1 \\ -3 & se \quad x < 1 \end{cases}$ **b**) $g(x) = \begin{cases} -1 & se \quad x \leq -2 \\ 3x + 2 & se \quad -2 < x < 0 \\ 7 - 2x & se \quad x \geq 0 \end{cases}$

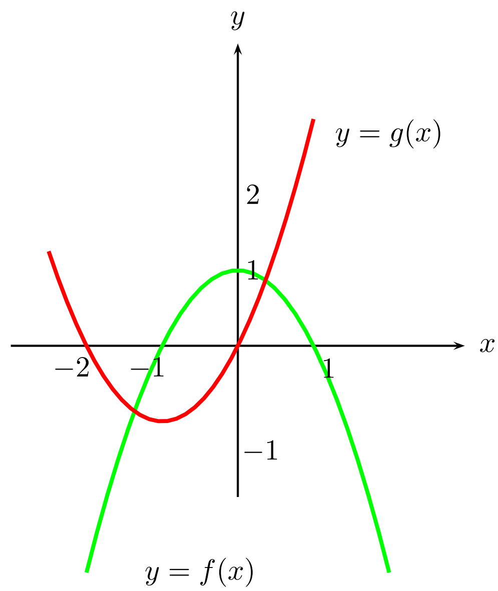
c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{2 - x} & se \quad x < -3 \\ -x^2 + \dfrac{4}{5} & se \quad -3 \leq x \leq 2 \\ x^2 - \dfrac{4}{5} & se \quad x > 2 \end{cases}$ **d**) $i(x) = \begin{cases} -x & se \quad x \leq -2 \\ 0 & se \quad -2 < x < 2 \\ x & se \quad x \geq 2 \end{cases}$

13. Resolva as seguintes inequações do 2º grau.

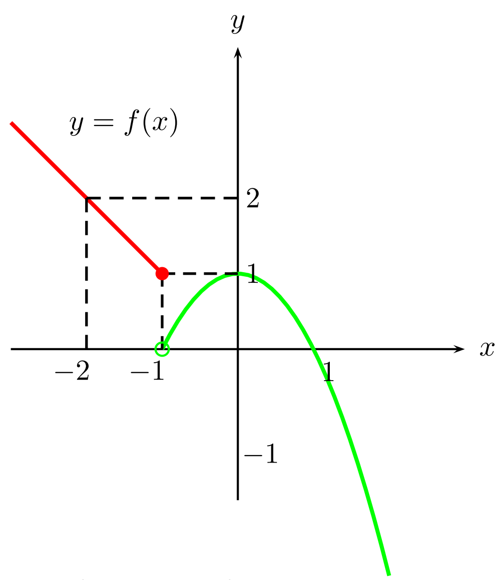
a) $x^2 + 1 \geq 2x$; **b**) $2 < x(x-3)$; **c**) $x^2 < x$

14. Resolva analítica e graficamente $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 1} \geq 0$.

15. Determine a expressão de f e g representadas graficamente



16. Na figura está representado o gráfico de uma função f.



a) Justifique que f é de facto uma função.

b) Determine o domínio e o contradomínio de f.

c) Faça um esboço de $f(x) + 1$, $f(x - 1)$ e $f(x - 1) + 1$.

d) Comente a seguinte afirmação:
" Existe um intervalo onde a função f é injectiva, decrescente e negativa."

e) Determine os valores de x tais que $1 \leq f(x) \leq 2$.

f) Mostre que para $x \leq -1$, $f(x) = -x$.

17. Determine analiticamente e geometricamente, caso seja possível, a solução dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 - 1 = y \\ y + x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 \\ -(x-1)^2 = y + 1 \end{cases}$

18. Calcule, quando possível, a inversa da função f. Utilize a sua máquina para traçar o gráfico de f e f^{-1} no mesmo referencial.

a) $f(x) = 2x - 3$ **b)** $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\ 0 \leq x \leq 3$ **c)** $f(x) = 5x + 1$ **d)** $f(x) = 1 - x^3$

19. Prove que f e g são funções inversas:

a) $f(x) = x^3;\quad g(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $f(x) = 9 - x^2,\ x \geq 0;\quad g(x) = \sqrt{9 - x},\ x \leq 9$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2x - 6}{3};\quad g(x) = \dfrac{3x + 6}{2}$

20. Determine o domínio e contradomínio das funções abaixo, e caracterize, se possível, a sua função inversa.

a) $f(x) = 2x - 1$ *b)* $g(x) = \dfrac{x+1}{x-5}$ *c)* $h(x) = x^3 - 1$ *d)* $i(x) = \dfrac{2+x}{x}$

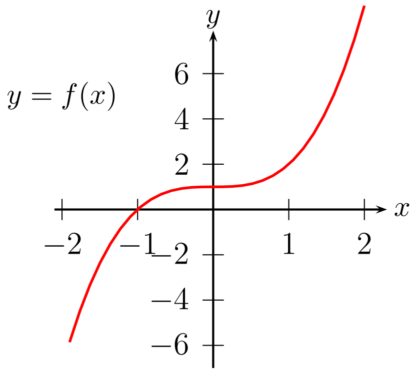
e) $f(x) = 2x^2 - 1$ *f)* $g(x) = \dfrac{x-3}{2x}$ *g)* $h(x) = x^2 - 2x - 3$ *h)* $i(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$

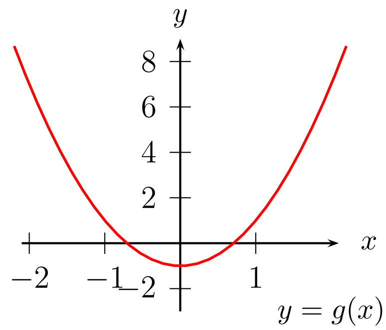
21. Seja $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. Determine:

a) $f \circ g(1)$ *b)* $g \circ f(-1)$ *c)* $g \circ f(0)$ *d)* $f \circ f(2)$ *e)* $f \circ g(-1)$

22. Determine, considerando os gráficos seguintes,

a) $(f \circ g)(1)$ *b)* $(g \circ f)(1)$ *c)* $(g \circ f)(0)$ *d)* $(f \circ g)(-1)$ *e)* $(g \circ f)(-1)$



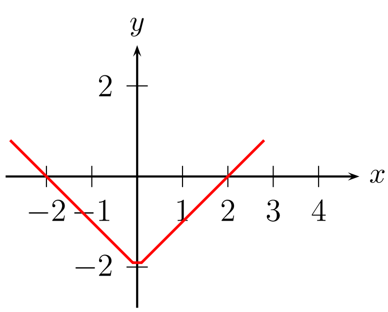


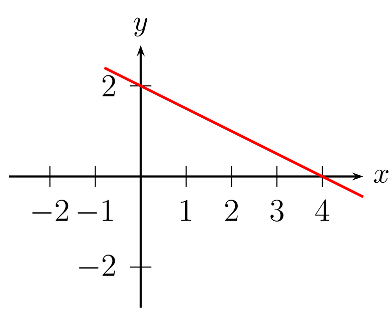
23. Associe a função ao gráfico.

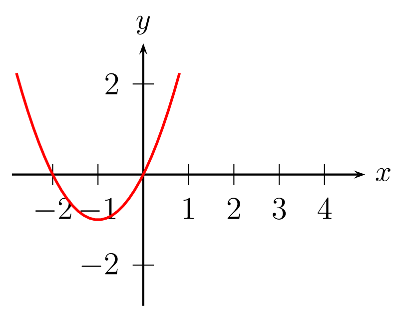
a) $y = x - 2$ **b)** $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ **c)** $y = x^2 + 2x$ **d)** $y = \sqrt{9 - x^2}$

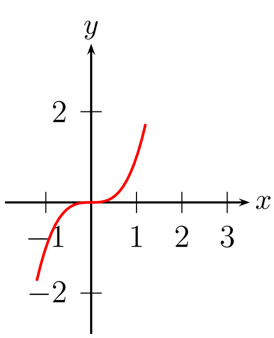
e) $y = |x| - 2$ **f)** $y = x^3 - x$ **g)** $y = 4 - 2x$ **h)** $y = \dfrac{1}{|x|}$

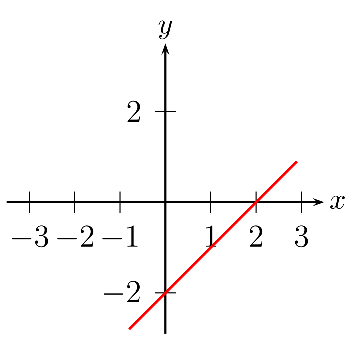
i) $y = x^3$ **j)** $y = \sqrt{2x - 3}$ **k)** $y = |x - 2|$ **l)** $y = 4 - x^2$

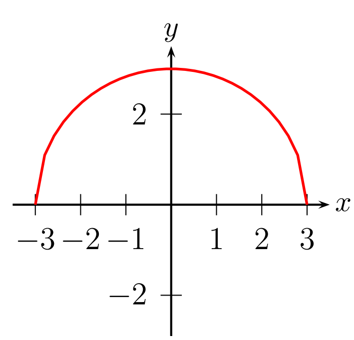


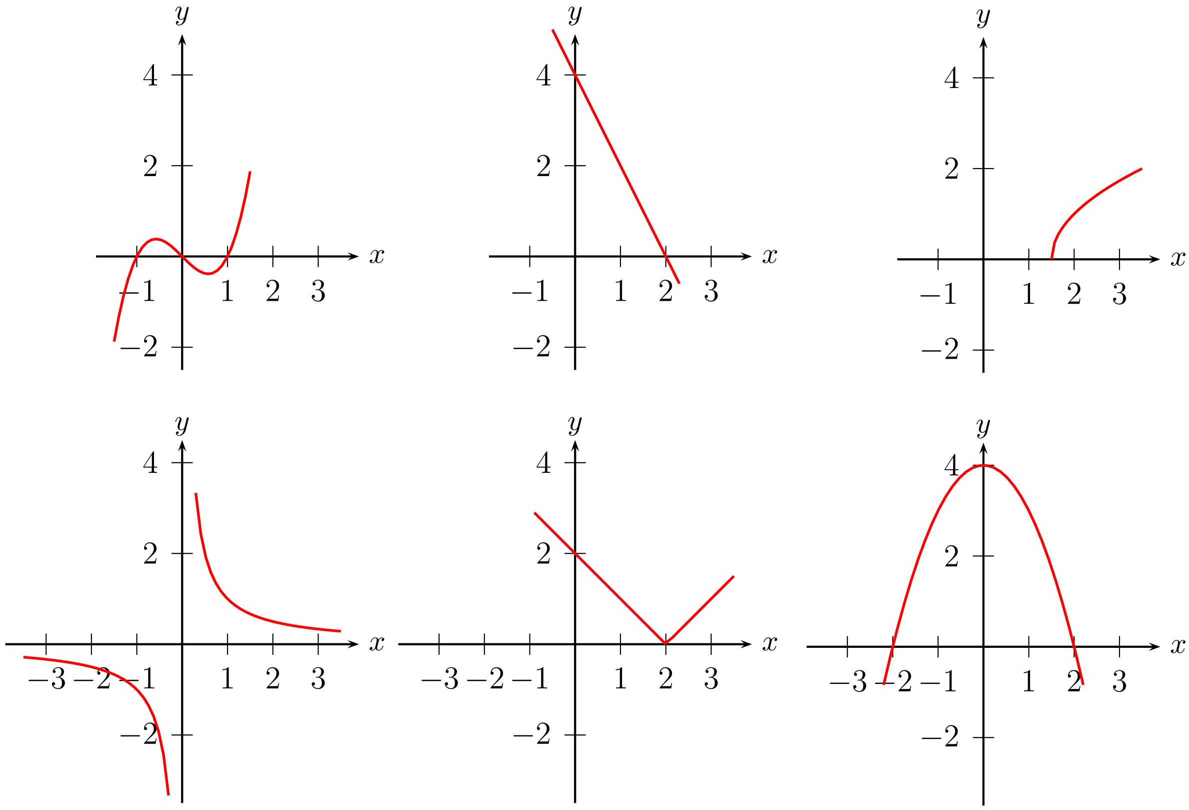












24. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\dfrac{4+x}{5-x} = -2$

b) $\dfrac{5x}{x+4} = 0$

c) $\dfrac{3(x-2)}{(x-1)^2} - \dfrac{5}{2x-2} = \dfrac{3}{x-x^2}$

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} = 0$

25. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $\dfrac{2}{4x+3} \geqslant 0$

b) $\dfrac{x+1}{2x-4} > 2$

c) $\dfrac{x^2-4}{2-3x} < 0$

d) $\dfrac{x-1}{2-3x} \geqslant 0$

e) $\dfrac{x^2}{(x-3)(4+x)} \geqslant 0$

f) $\dfrac{(x-2)^3}{x^2(x+2)^2} \leqslant 0$

g) $\dfrac{-(x-1)^2}{(x+1)^3} \leqslant 0$

h) $\dfrac{x^2-4x}{x^2-2x+1} > 0$

i) $\dfrac{1}{x} > x$

j) $\dfrac{1}{2x-1} \geqslant \dfrac{1}{x}$

k) $\dfrac{2x}{x^2-2x} - \dfrac{x}{x-2} + \dfrac{1}{x} \geqslant 1$